<u>מבחן מועד א' סמסטר אביב תשע"ו</u>

<u>מבני נתונים</u>

- **משך המבחן: שלוש וחצי שעות.**
- **יש לענות על כל השאלות.**
- **מותר השימוש בחומר עזר כלשהו פרט למחשבים (מחשבונים מותר).**
- **יש להקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת של התשובות.**

בהצלחה !

<u>1. (25 נקודות)</u>

<u>הגדרה</u>: נגדיר עץ בינארי אדום לבן, כעץ בינארי שבו לכל צומת **x**, בנוסף לשדות הרגילים, יש שדה צבע **color(x)** שהוא אדום (**red**) או לבן (**white**).

<u>הגדרה:</u> נגדיר שמסלול **P** בעץ בינארי אדום לבן הוא מסלול טוב אם המסלול מתחיל בצומת בצבע לבן ואז מטפס למעלה בעץ 0 או יותר צעדים בצמתים לבנים ואז יורד למטה 0 או יותר צעדים בצמתים אדומים.

לדוגמה, המסלול שמחבר בין הצמתים 40 ו- 25 בעץ שבציור בעמוד הבא הוא מסלול טוב, והמסלול שמחבר בין הצמתים 80 ו- 17 אינו מסלול טוב.

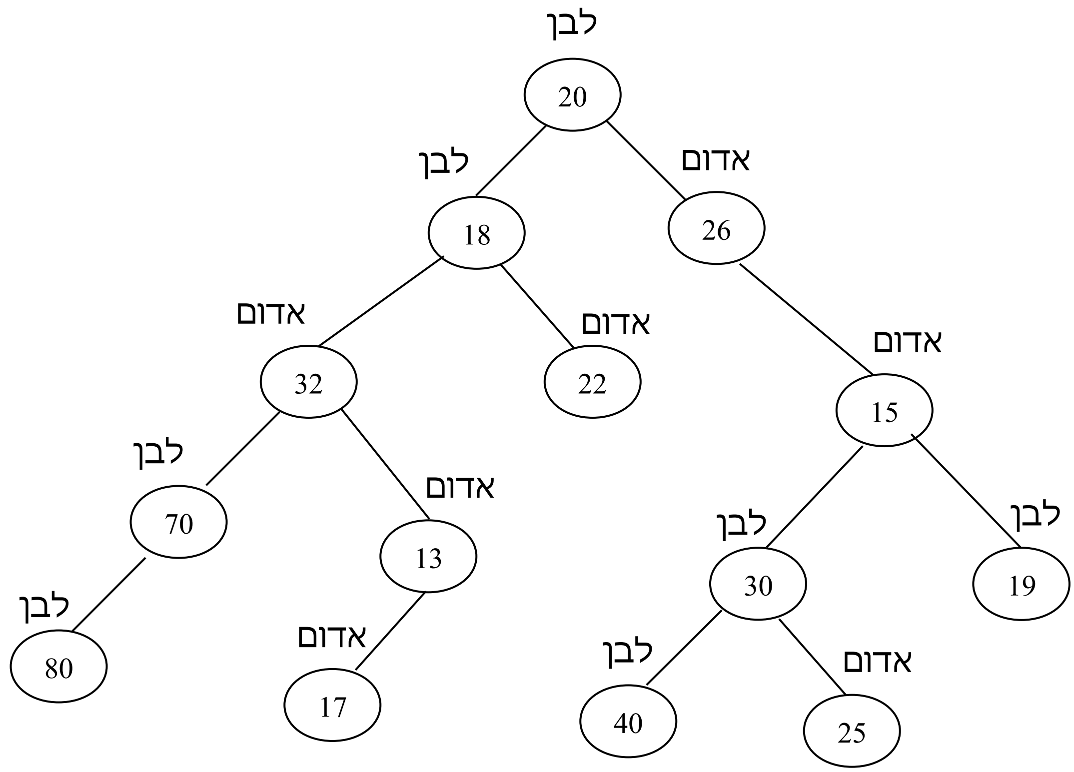
כתוב/כתבי פסאודו-קוד של פונקציה בשם **P1**, <u>יעילה ככל האפשר</u>, אשר מקבלת כפרמטר עץ בינארי אדום לבן **T** ומדפיסה את מספר הצמתים במסלול הטוב הארוך ביותר שמחבר בין שני צמתים בעץ.

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה שכתבת כתלות במספר הצמתים בעץ **n**.

<u>הנחות ודרישות:</u>
- אין להשתמש במבני עזר נוספים.
- מותר להשתמש במספר קבוע של משתנים (כמו למשל **x,y,z**).
- מותר להשתמש בפונקציות עזר, אך יש לכתוב את הפסיאודו-קוד של פונקציות העזר.
- כל צומת **x** בעץ מכיל את השדות הרגילים של עץ בינארי כפי שהוגדר בכיתה.

דוגמה:

יהי **T** עץ בינארי אדום לבן שמתואר בציור הבא :



לאחר הקריאה לפונקציה **P1(T)** יתקבל הפלט: 4

<u>הסבר לפלט</u>: המסלול הטוב הארוך ביותר בעץ הוא המסלול הבא שמחבר בין 18 ל- 15: 18 20 26 15

מסלול זה מכיל 4 צמתים ולכן הפלט הוא 4.

2. (30 נקודות)

במערכת המחשוב של אופ"א (ארגון התאחדויות הכדורגל הארופיות) שומרים נתונים על משחקי היורו מאז שהחלו בשנת 1960, כפי שמתואר בהמשך.

לכל שחקן שומרים: שם השחקן (משמש לזיהוי השחקן), תאריך הלידה שלו, וכן נתונים על המשחקים שבהם שיחק במשחקי היורו.

הנח/הניחי שכל שחקן משחק במשחקי היורו במדי נבחרת אחת בלבד. דהיינו אם שחקן מסוים שיחק במדי נבחרת גרמניה באיזשהו משחק יורו, אז בכל משחקי היורו שבהם הוא השתתף הוא תמיד שיחק במדי נבחרת גרמניה.

לכל משחק שומרים: תאריך המשחק, ושמות שתי הנבחרות שהתמודדו במשחק (התאריך ושמות שתי הנבחרות משמשים לזיהוי המשחק), וכן נתונים על המשחק כמו למשל, השחקנים ששיחקו במשחק, תוצאת המשחק, מספר השערים שנכבשו במשחק, ההחלפות שבוצעו במשחק ובאיזה דקה הן בוצעו.

הנח/הניחי שמספר הדקות שבמשחק כדורגל הוא <u>קבוע</u> ושווה ל- 120.

לכל נבחרת שומרים: שם הנבחרת, דהיינו שם המדינה שאותה מיצגת הנבחרת (משמש לזיהוי הנבחרת), וכן נתונים על המשחקים שבהם השתתפה הנבחרת.

<u>הערה</u>: האופן בו נשמרים הנתונים הנ"ל אינו מפורט ויהיה עליך לציין אותו כחלק מפתרון השאלה.

המשך בעמוד הבא...

הצע/הציעי מבנה נתונים עבור המערכת הנ"ל ששומר את הנתונים הנ"ל ותומך בפעולות הבאות:

- הוספת/הוצאת הנתון ששחקן מסוים שיחק במשחק מסוים ונגע בכדור מספר פעמים מסוים מתבצעת בזמן O(logx) בממוצע כאשר **x** מציין את מספר המשחקים שבהם השתתף השחקן במשחקי היורו.
- הוספת/הוצאת הנתון שהתבצעה החלפה של שחקן מסוים בשחקן אחר מסוים במשחק מסוים בדקה מסוימת מתבצעת בזמן O(1) בממוצע.
- עדכון מספר הזכיות של נבחרת מסוימת בתחרויות היורו מתבצע בזמן O(logc) במקרה הגרוע כאשר c מציין את מספר הנבחרות שהשתתפו במשחקי היורו.
- הוספת/הוצאת הנתון שבמשחק מסוים נבחרת מסוימת כבשה מספר שערים מסוים מתבצעת בזמן O(logc+logz) במקרה הגרוע, כאשר c מצין את מספר הנבחרות שהשתתפו במשחקי היורו, ו- z מציין את מספר המשחקים שבהם השתתפה הנבחרת במשחקי היורו.
- בהינתן שם שחקן, הדפסת כל המשחקים שבהם שיחק השחקן במשחקי היורו, ממוינים לפי מספר הנגיעות בכדור של השחקן במהלך המשחק בזמן O(g) בממוצע כאשר g מציין את מספר המשחקים ברשימה שתודפס.
- בהינתן משחק (דהינו תאריך המשחק והקבוצות שהתמודדו במשחק), הדפסת כל ההחלפות שהתבצעו במשחק ממוינות לפי הדקות שבהן התבצעו ההחלפות בזמן O(r) בממוצע כאשר r מציין את מספר ההחלפות ברשימה שתודפס.
- בהינתן **k**, הדפסת **k** הנבחרות שזכו מספר גדול ביותר של פעמים בתחרויות היורו, בזמן O(**k**) במקרה הגרוע.
- בהינתן שם נבחרת ומספר **k**, הדפסת **k** המשחקים שבהם שיחקה הנבחרת במשחקי היורו וכבשה מספר גדול ביותר של שערים בזמן O(k+logc) במקרה הגרוע כאשר c מציין את מספר הנבחרות שהשתתפו במשחקי היורו.

בנוסף לתאור מבנה הנתונים שהצעת, תאר/י באופן מילולי איך מתבצעות שלושת הפעולות האחרונות.

3. (15 נקודות)

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם P3(n,m) שמקבלת כפרמטר מספר n. הפונקציה קוראת לפונקצית עזר בשם F(x) שמקבלת כפרמטר מספר x ומתוארת בהמשך.

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה P3(n,m) כתלות ב- n ו- m (במונחים של ה- O הקטן ביותר שאתה/את יודע/ת להשיג).

```
P3(n,m)
-------
y=0
for (i = 1; i ≤ n²; i++) {
  for (j = 1; j ≤ 2^(m²) ; j=j·2) {
     y=y+F(i)·F(j)
  }
}
return y
```

```
F(x)
-------
if (x≤1) {return 1}
s=0
for (i = 1; i ≤ x²; i++)
   {
     s=s+i
   }
return  s+F(x/2)+F(x/3)+F(x/4)
```

4. (15 נקודות)

הוכח שלכל מספר שלם חיובי n שמתחלק ב- 6 (ללא שארית) וגדול מ- 32 קיים עץ בינארי שמקיים את כל ארבעת התנאים הבאים:

1) מספר הצמתים בעץ הוא בדיוק n.

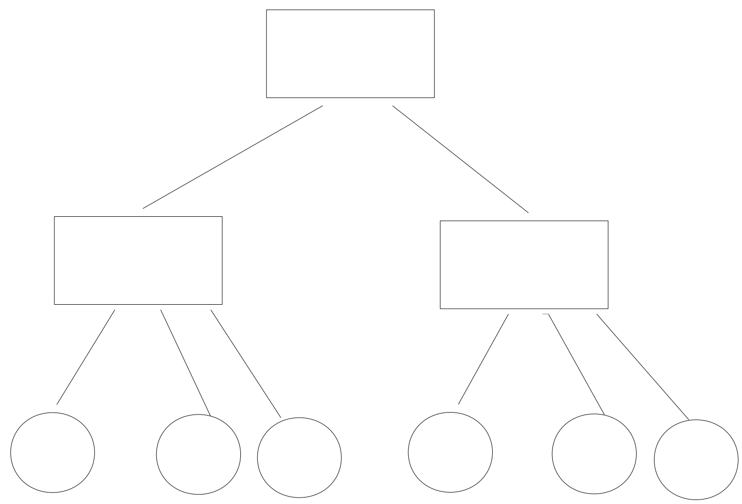
2) יש בעץ לפחות $\frac{n}{12}$ צמתים שהרמה שלהם גדולה מ- $\log_2(\frac{n}{3})-2$ וקטנה מ- $\log_2(\frac{n}{3})+1$.

3) יש בעץ לפחות $\frac{n}{12}$ צמתים שהרמה שלהם גדולה מ- $\frac{n}{6}+\log_2(\frac{n}{3})+\log_2(\frac{n}{6})-4$ וקטנה מ- $\frac{n}{6}+\log_2(\frac{n}{3})+\log_2(\frac{n}{6})+4$

4) יש בעץ לפחות $\frac{n}{6}-1$ עלים.

5. (15 נקודות)

שאלה זו מתייחסת להוספה של איברים לעץ **B** לפי אלגוריתם ההוספה שנלמד בכיתה.
יהי **T** עץ **B** שבו **t=3** שמתואר בציור הבא (גובה העץ 3):



מהו המספר הקטן ביותר של איברים שיש להוסיף לעץ (אחד אחרי השני) כדי לקבל עץ שגובהו 4 ומספר הבנים של השורש שלו הוא 3.

נמק את תשובתך על ידי ציור העץ **T** וציון הצמתים שצריך להוסיף לעץ כדי לקבל עץ שגובהו 4 ומספר הבנים של השורש שלו הוא 3.

בהצלחה!