

מבחן מועד א' סמסטר אביב תשע"ח

מבני נתונים

- משך המבחן: שלוש וחצי שעות.
- יש לענות על כל השאלות.
- מותר השימוש בחומר עזר כלשהו פרט למחשבים (מחשבוני מותר).
- יש להקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת של התשובות.

בהצלחה!

1. (20 נקודות)

הגדרה: נגדיר גובה של עץ בינארי T , כמספר הצמתים במסלול הארוך ביותר שמחבר בין השורש לאישזהו עלה בעץ T . לדוגמה גובה העץ שבצירור בעמוד הבא הוא 5.

הגדרה: נגדיר גובה של צומת x בעץ בינארי T , כגובה של תת העץ של T ששורשו x (תת העץ כולל גם את x). לדוגמה גובה הצומת שהמפתח שלה הוא 26 בעץ שבצירור בעמוד הבא הוא 3.

כתוב/כתבי פסאודו-קוד של תכנית בשם $P1$, (אין צורך שהתכנית תהיה יעילה ככל האפשר), אשר מקבלת כפרמטר עץ בינארי T ומדפיסה את הצמתים בעץ לפי הסדר הבא:

בשורה הראשונה: כל הצמתים שהגובה שלהם הוא 1 (מסודרים משמאל לימין)

בשורה השנייה: כל הצמתים שהגובה שלהם הוא 2 (מסודרים משמאל לימין)

בשורה השלישית: כל הצמתים שהגובה שלהם הוא 3 (מסודרים משמאל לימין)

וכן הלאה...

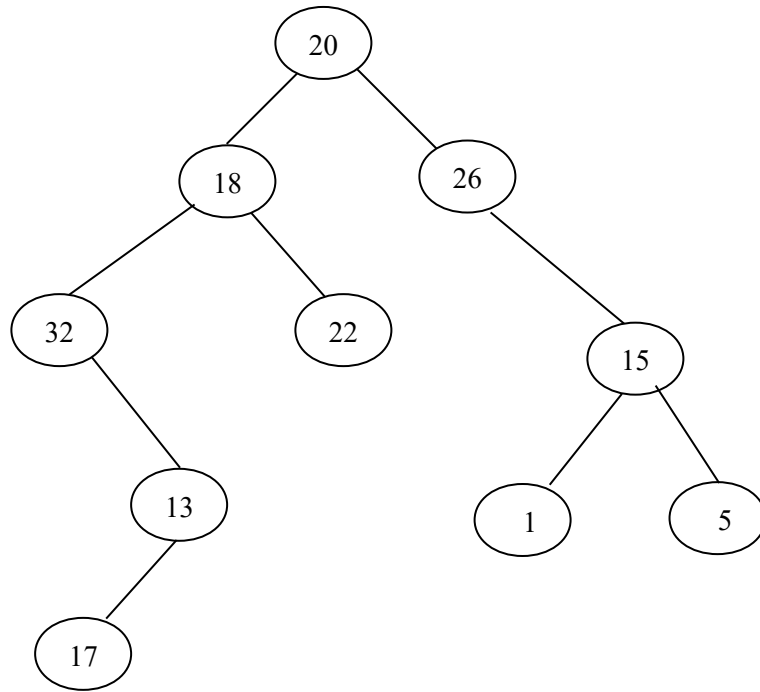
נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של התכנית שכתבת כתלות במספר הצמתים בעץ n .

הנחות ודרישות:

- אין להשתמש במבני עזר נוספים.
- מותר להשתמש במספר קבוע של משתנים (כמו למשל x, y, z).
- מותר להשתמש בתכניות עזר, אך יש לכתוב את הפסאודו-קוד של תכניות העזר.
- כל צומת x בעץ מכיל את השדות הרגילים של עץ בינארי כפי שהוגדר בכיתה.

דוגמה:

יהי T עץ בינארי שמתואר בציור הבא :



לאחר הקריאה לתכנית $P1(T)$ יתקבל הפלט:

17 22 1 5
13 15
32 26
18
20

2. (30 נקודות)

במערכת המחשוב של `tripadvisor` (חברה אמריקאית שמנהלת אתר אינטרנט) שומרים בין השאר נתונים של חוות דעת של מטילים על אתרי טיול שונים במקומות שונים בעולם.

לכל מטיל שמביע חוות דעת באתר ה- `tripadvisor` יש שם משתמש שמזהה אותו.

לכל חוות דעת של מטיל שומרים: את מאפיני חוות הדעת שכוללים את שם המשתמש שנתן את חוות הדעת, את התאריך והשעה שבו ניתנה חוות הדעת, ואת והאתר שעליו ניתנה חוות הדעת. בנוסף לכך שומרים לכל חוות דעת את הטכסט של חוות הדעת שכתב המשתמש (ניתן להניח שפעולת הדפסת טכסט זה היא $O(1)$ במקרה הגרוע) ואת הדרוג שהמשתמש נתן לאתר בחוות הדעת שיכול להיות אחת מהאפשרויות הבאות:

excellent
very good
average
poor
terrible

מאפיני ישוב כוללים את שם הישוב ושם המדינה שבה נמצא הישוב.

לכל אתר טיול שומרים את מאפיני אתר הטיול שכוללים את שם האתר, ומאפיני הישוב שבו נמצא האתר. בנוסף לכך שומרים נתונים על חוות הדעת שהמטילים נתנו לאתר.

ניתן להניח שיש במערכת פונקציה בשם `find-distance` שמקבלת כקלט שני מאפיני אתרים ומחזירה מספר שמציין את מרחק הנסיעה הקצר ביותר בין שני האתרים בק"מ. ניתן להניח שהחישוב שפונקציה זו מבצעת הוא $O(1)$ במקרה הגרוע.

הערה: האופן בו נשמרים הנתונים הנ"ל אינו מפורט ויהיה עליך לצין אותו כחלק מפתרון השאלה.

המשך בעמוד הבא...

הצע/הציעי מבנה נתונים עבור המערכת הנ"ל ששומר את הנתונים הנ"ל ותומך בפעולות הבאות:

- הוספת/הוצאת חוות דעת של מטייל מסוים על אתר טיול מסוים מתבצעת בזמן $O(\log m + \log c + \log y)$ בממוצע כאשר m מציין את מספר המדינות שעבורן שומרים נתונים במערכת, c מציין את מספר אתרי הטיול הגדול ביותר שנמצאים בישוב אחד (שנשמרים במערכת), ו- y מציין את מספר חוות הדעת הגדול ביותר על אתר טיול אחד (שנשמרות במערכת).
- בהינתן שם משתמש, הדפסת כל חוות הדעת של המשתמש ללא חשיבות לסדר, מתבצעת בזמן $O(h)$ בממוצע כאשר h מציין את מספר חוות הדעת ברשימה שתודפס.
- בהינתן מאפיני אתר טיול, הדפסת כל חוות הדעת על אתר הטיול ממוינות לפי התאריך והשעה שבהם ניתנו חוות הדעת בסדר יורד, (דהינו, חוות הדעת האחרונה שניתנה תופיע ראשונה ברשימה שתודפס), מתבצעת בזמן $O(x)$ בממוצע כאשר x מציין את מספר חוות הדעת ברשימה שתודפס.
- בהינתן מאפיני אתר ומספר ק"מ k , הדפסת כל אתרי הטיול שנמצאים במדינה שבה נמצא האתר במרחק נסיעה של לכל היותר k ק"מ מהאתר, ממוינים (בסדר יורד) לפי לפי אחוזי חוות הדעת של המטילים שבהן ניתן ציון excellent לאתר הטיול, מתבצעת בזמן $O(\log m + q + p \log p)$ במקרה הגרוע כאשר m מציין את מספר המדינות שעבורן שומרים נתונים במערכת, q מציין את מספר אתרי הטיול במדינה, ו- p מציין את מספר אתרי הטיול ברשימה שתודפס.
- בהינתן שם ישוב ומספר k הדפסת k אתרי הטיול בעלי הדרוג הגבוה ביותר בישוב ממוינים (בסדר יורד) לפי אחוזי חוות הדעת של המטילים שבהן ניתן ציון excellent לאתר הטיול, מתבצעת בזמן $O(x)$ בממוצע, כאשר x , מצין את מספר אתרי הטיול ברשימה שתודפס.

בנוסף לתאור מבנה הנתונים שהצעת, תאר/י באופן מילולי איך מתבצעות שלושת הפעולות האחרונות.

.3 (20 נקודות)

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם $P3(n,m)$ שמקבלת כפרמטרים מספרים $m-1$ ו- n . הפונקציה קוראת לפונקצית עזר בשם $F(x)$ שמקבלת כפרמטר מספר x ומתוארת בהמשך.

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה $P3(n,m)$ כתלות ב- n ו- m (במונחים של ה- O הקטן ביותר שאתה/את יודעת להשיג).

$P3(n,m)$

$y=0$

```
for (i = 1; i ≤ 2n ; i=i*2) {
    if ( i ≤ 2n ) {
        for (j = 1; j ≤ 2m ; j=j*2) {
            y=y+F(j)
        }
    }
    y=y+F( m2 )
}
return y
```

$F(x)$

$s=0$

```
for (i = 1; i ≤ i ≤ 2√(x) ; i=i*2) {
    for (j = 1; j ≤ 3√(x) ; j=j*3) {
        s++
    }
}
return s
```

4. (15 נקודות)

הוכח שלכל מספר שלם חיובי n שמתחלק ב-8 (ללא שארית) וגדול מ-32 קיים עץ בינארי שמקיים את כל ששת התנאים הבאים:

(1) מספר הצמתים בעץ הוא בדיוק n .

(2) בתת העץ הימני של השורש יש לפחות $\frac{n}{4}$ צמתים ובתת העץ

השמאלי של השורש יש לפחות $\frac{n}{2}$ צמתים.

(3) יש בעץ לפחות $\frac{n}{8}$ צמתים שהרמה שלהם

$$\log_2\left(\frac{n}{4}\right) - 4 \quad \text{גדולה מ-}$$

$$\log_2\left(\frac{n}{4}\right) + 4 \quad \text{וקטנה מ-}$$

(4) יש בעץ לפחות $\frac{n}{16}$ צמתים שהרמה שלהם

$$\frac{n}{4} + 2\log_2\left(\frac{n}{4}\right) - 4 \quad \text{גדולה מ-}$$

$$\frac{n}{4} + 2\log_2\left(\frac{n}{4}\right) + 4 \quad \text{וקטנה מ-}$$

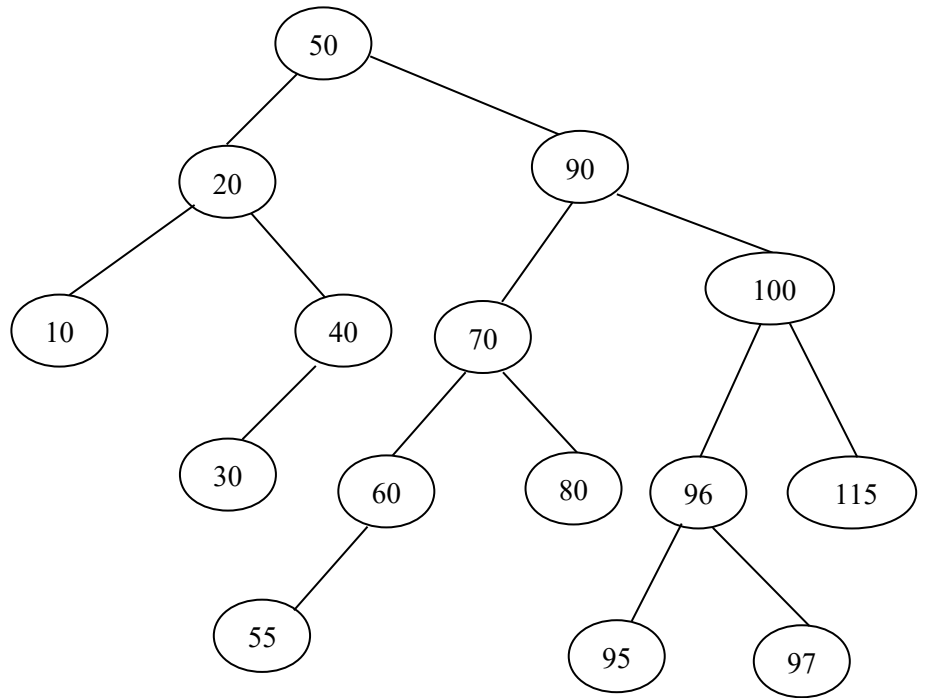
(5) יש בעץ לפחות $\frac{n}{4} - 1$ צמתים שיש להם בן אחד בלבד.

(6) יש בעץ לפחות $\frac{3n}{16} - 1$ עלים.

5. (15 נקודות)

שאלה זו מתייחסת להוספה/הוצאה של איברים בעץ AVL לפי אלגוריתמי ההוספה/הוצאה שנלמדו בכיתה.

יהי T עץ AVL שמתואר בציור הבא :



א) ציר את העץ שיתקבל לאחר הוצאת הצמתים 70 60 55 מהעץ המקורי T. (מספיק לצייר את העץ הסופי, אין צורך לצייר את שלבי הביניים).

ב) מהו המספר הקטן ביותר של צמתים שיש להוסיף לעץ T המקורי כדי לגרום לגובה העץ לעלות ב-1? נמק/י את תשובתך על ידי ציון מפתחות הצמתים שצריך להוסיף לעץ כדי לגרום לגובה לעלות ב-1.

בהצלחה!