

25.9.2007

מבחן מועד א'
מבני נתונים
סמסטר קיץ, תשס"ז

- משך המבחן: שלוש וחצי שעות.
- יש לענות על כל השאלות.
- מותר השימוש בחומר עזר כלשהו פרט למחשבים או מחשבונים.
- יש להקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת של התשובות.

בהצלחה !

1. (25 נקודות)

הגדרה: עבור צומת x בעץ בינארי T נגדיר את **מספר האיזון** של x ונסמנו $\text{num-balance}(x)$ כמספר הצמתים בתת העץ השמאלי של x פחות מספר הצמתים בתת העץ הימני של x . לדוגמה, בעץ שבציור מספר האיזון של הצומת שהמפתח שלה הוא 9 הנו 3-.

כתוב/כתבי פסאודו-קוד לפונקציה בשם $P1$, **יעילה ככל האפשר**, אשר מקבלת עץ בינארי T ומספר k ומדפיסה את כל הצמתים בעץ T שמספר האיזון שלהם גדול מ- k .

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה שכתבת כתלות בגובה העץ (h) או במס' האיברים בעץ (n) (בחר/י את האפשרות המתאימה מבין h או n לפונקציה שכתבת).

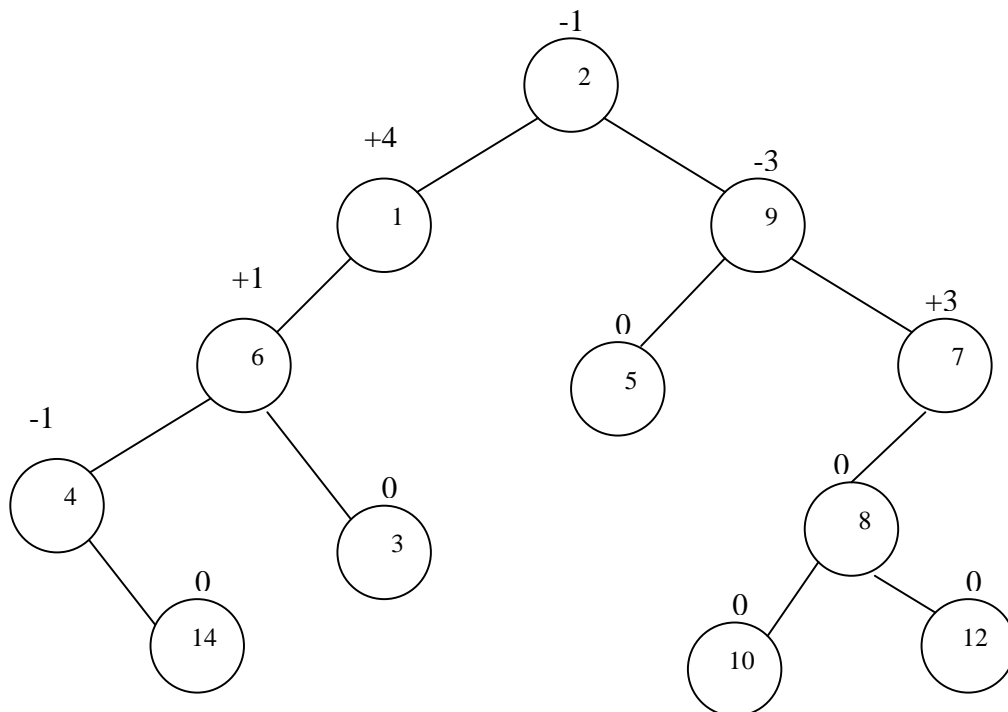
שימו לב שהעץ T הוא עץ בינארי כללי ומספרי האיזון (או הגבהים) של הצמתים **אינם** מופיעים כשדות של הצמתים.

הנחות ודרישות:

- אין להשתמש במבני עזר נוספים.
- מותר להשתמש במשתנים (כמו למשל x, y, z). מס' המשתנים האלו הוא קבוע שאינו תלוי ב- n או ב- h .

דוגמה:

נסתכל על העץ הבא (מספרי האיזון רשומים מעל הצמתים).



לאחר הקריאה לתוכנית $P1(T,-1)$ יודפסו הצמתים: 12 10 8 7 5 1 3 6 14
לאחר הקריאה לתוכנית $P1(T,0)$ יודפסו הצמתים: 7 1 6
לאחר הקריאה לתוכנית $P1(T,4)$ לא יודפס אף צומת.

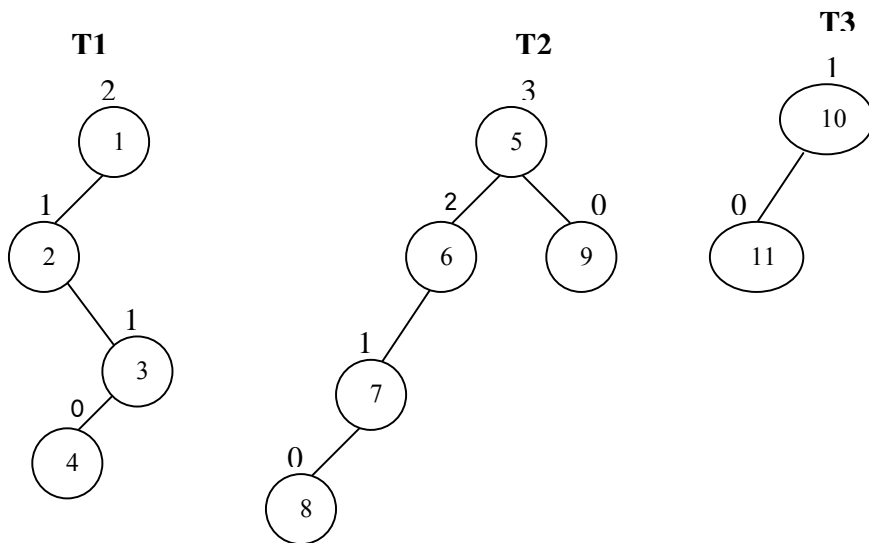
2. (20 נקודות)

נגדיר "עץ בינארי עם מספרים" כעץ בינארי T שבו לכל צומת x בנוסף לשדות הרגילים יש שדה $s(x)$ המכיל את מספר הצמתים שיש להם גורם איזון חיובי בתת העץ של T ששורשו x . נזכיר שגורם איזון בצומת x מוגדר כגובה תת העץ השמאלי של x פחות גובה תת העץ הימני של x .

תארו/י באופן מילולי פונקציה בשם $P2$ יעילה כל האפשר שמקבלת קלט k עצים בינאריים עם מספרים T_1, \dots, T_k ומספר m . הפונקציה מחזירה את m האיברים הראשונים בסידור (בסדר יורד) של האיברים שבעצים לפי שדה ה- s שלהם. נתח את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה שתיארת כתלות ב- m ו- k .

דוגמה:

נסתכל על העצים T_1, T_2, T_3 שבציור הבא (שדה ה- s רשום מעל כל צומת).



לאחר הקריאה לפונקציה $P2(T_1, T_2, T_3, 4)$ יודפסו הצמתים: **5,6,1,10**. הסדר בים הצמתים 1 ו-6 אינו מחייב. בנוסף ניתן לבחור במקום צומת 10 צומת אחרת ששדה ה- s שלה הוא 1. לכן, גם הפלט הבא הינו פלט חוקי לקריאה הקודמת: **5,1,6,7**. לאחר הקריאה לתוכנית $P2(T_1, T_2, T_3, 6)$ יודפסו הצמתים: **5,6,1,10,2,7**. (גם במקרה זה ישנן אפשרויות נוספות לפלט חוקי).

3. (15 נקודות)

נתונה נוסחת הנסיגה הבאה:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

איזה מבין האפשרויות הבאות מתקיימת? (יתכן ומתקיימת יותר מאפשרות אחת). הוכח/ הוכיחי את תשובתך.

א. $T(n) = O(n^2 \log n)$

ב. $T(n) = \theta(n)$

ג. $T(n) = \theta(n^2)$

ד. $T(n) = \theta(n \log n)$

ה. אף אחת מהתשובות אינה נכונה.

4. (25 נקודות)

נגדיר מבנה נתונים עם צבעים אדום ושחור כמבנה נתונים שלכל איבר בו יש צבע אדום או שחור (אבל לא שניהם). נגדיר את העוקב של איבר x כאיבר בעל המפתח הקטן ביותר מבין האיברים שהמפתחות שלהם גדולים מהמפתח של x . נגדיר את העוקב האדום של איבר x כאיבר בעל המפתח הקטן ביותר מבין האיברים האדומים שהמפתחות שלהם גדולים מהמפתח של x . באופן דומה נגדיר את העוקב השחור של איבר x .

חלק א

הצע/הציעי מבנה נתונים עם צבעים אדום ושחור שתומך בפעולות הבאות (מניחים שמספר האיברים הנוכחי הוא n ושאינן איברים בעלי מפתחות זהים):

- הכנסת איבר חדש בזמן $O(\log n)$,
- חיפוש איבר בזמן $O(\log n)$,
- הוצאת איבר בזמן $O(\log n)$ (כשמקבלים מצביע לאיבר שרוצים להוציא),
- בהינתן איבר x אדום חישוב העוקב של x בזמן $O(1)$.
- בהינתן איבר x אדום חישוב העוקב האדום של x בזמן $O(1)$,
- בהינתן איבר x שחור חישוב העוקב השחור של x בזמן $O(1)$,
- בהינתן איבר x אדום שינוי הצבע של x לשחור בזמן $O(\log n)$.

תארו/י באופן מילולי איך מתבצעת כל אחת מהפעולות הנ"ל.

חלק ב

מוסיפים את הדרישה הבאה לרשימת הפעולות שתוארה בחלק א:

- בהינתן איבר x אדום חישוב העוקב השחור של x בזמן $O(1)$.

האם קיים מבנה נתונים עם צבעים אדום ושחור שתומך בפעולות הנ"ל בסיבוכיות הנדרשת?

במידה וכן הצע/הציעי מבנה נתונים כזה ותאר/י כיצד מתבצעת הוצאת איבר מהמבנה. במידה ולא נמק/י מדוע אין הדבר אפשרי.

5. (15 נקודות)

א. האם קיים עץ **AVL** בגובה 5 כך שאם נוציא ממנו עלה יתבצע גלגול אחד בלבד מסוג **RL** סביב שורש העץ.

במידה וקיים עץ כזה צייר אותו וציין איזה עלה יש להוציא כדי שיקרה גלגול אחד בלבד מסוג **RL** סביב שורש העץ. במידה ולא נמק מדוע אין עץ כזה.

ב. יהי **T** עץ **B** (שבו $t=3$) בגובה 4 בעל מספר קטן ביותר של איברים. ציר את העץ שמתקבל לאחר הוצאת 6 האיברים הגדולים ביותר מהעץ **T** לפי הסדר הבא: תחילה מוציאים את האיבר הגדול ביותר בעץ **T**, לאחר מכן מוציאים את האיבר השני בגודלו בעץ **T** וכן הלאה עד שלבסוף מוציאים את האיבר השישי בגודלו בעץ **T**.

בהצלחה!