ביה"ס למדעי המחשב ומתמטיקה המכללה האקדמית נתניה

11.10.2009

<u>מבחן מועד א'</u>

<u>מבני נתונים</u>

סמסטר קיץ, תשס"ט

- משך המבחן: שלוש וחצי שעות.
- יש לענות על כל השאלות.
- מותר השימוש בחומר עזר כלשהו פרט למחשבים (מחשבונים מותר).
- יש להקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת של התשובות.

בהצלחה !

<u>1. (20 נקודות)</u>

יהי **T** עץ בינארי ויהי **x** איבר בעץ **T**. נסמן ב- $\mathbf{T_x}$ את תת העץ של **T** ששורשו **x**. (תת העץ $\mathbf{T_x}$ כולל את **x**). נאמר ש- **x** הוא איבר "נמוך" בעץ **T** אם הגובה של **x** כפול שנים קטן מסכום הגבהים של כל האיברים שנמצאים בתת העץ $\mathbf{T_x}$.

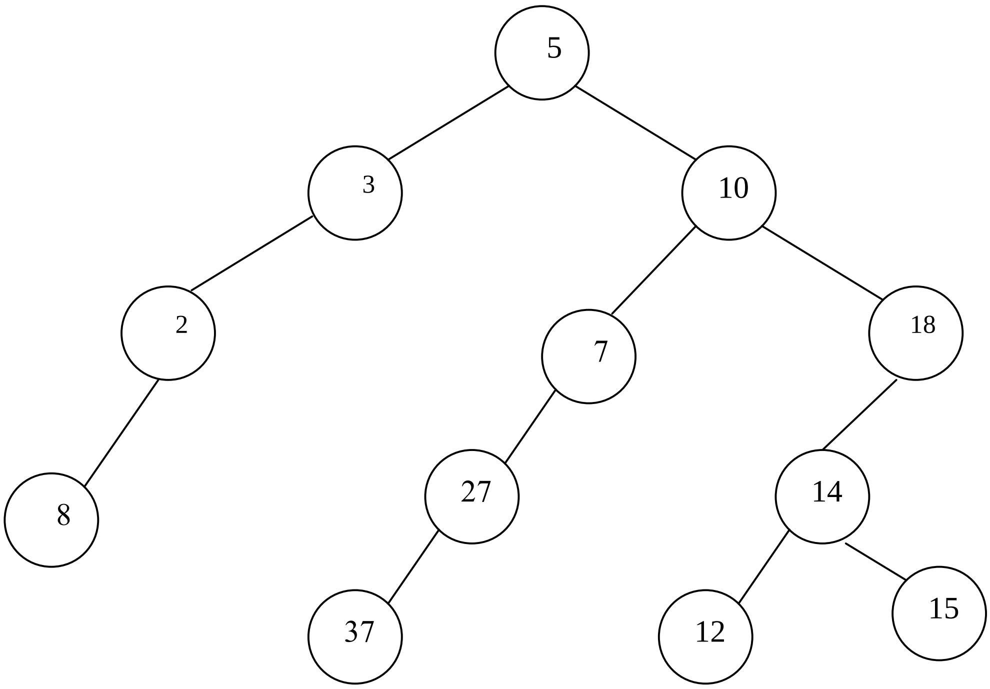
כתוב/כתבי פסאודו-קוד לפונקציה בשם P1, <u>**יעילה ככל האפשר**</u>, אשר מקבלת כפרמטרים עץ בינארי **T** ומדפיסה (לפי סדר כלשהו) את מפתחות כל האיברים הנמוכים בעץ **T**.

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה שכתבת כתלות בגובה העץ (h) או במס' האיברים בעץ (n) (בחר/י את האפשרות המתאימה מבין h או n לפונקציה שכתבת).

<u>הנחות ודרישות:</u>
- אין להשתמש במבני עזר נוספים.
- גובה האיברים בעץ אינו נתון (על התוכנית P1 לחשב אותו).
- מותר להשתמש במשתנים (כמו למשל x,y,z). מס' המשתנים האלו הוא קבוע שאינו תלוי ב- n או ב- h.

<u>דוגמה:</u>

יהי T העץ הבא:



לאחר הקריאה לתוכנית P1(T) עבור העץ **T** שבציור יתקבל הפלט הבא:

5, 10, 18

2. (20 נקודות)

לכל מספר טבעי k נגדיר את bin(n,k) כייצוג המספר k כמספר בינארי באורך n. לדוגמה, bin(5,9) הנו המספר הבינארי 01001.

הצע/הציעי מבנה נתונים שמכיל מספרים טבעיים (עם חזרות) ותומך בפעולות הבאות, כאשר n מיצג את אורך הייצוג הבינארי של המספרים ו- N מיצג את מספר המספרים השונים שבמבנה:

- בהינתן מספר טבעי k וייצוגו הבינארי באורך n, הוספת המספר למבנה (בהנחה שהמספר לא קים במבנה) בזמן O(max{logN,nlogn}) במקרה הגרוע.
- בהינתן מספר טבעי k שקיים במבנה הוספת מופע נוסף של המספר בזמן O(logN) במקרה הגרוע.
- בהינתן מספר טבעי k שקיים במבנה מחיקת מופע של המספר מהמבנה בזמן O(logN) במקרה הגרוע. (אם המספר מופיע רק פעם אחת במבנה, אזי לאחר מחיקת המופע שלו המספר לא יופיע יותר במבנה).
- בהינתן שלושה מספרים טבעיים i,j,k הדפסת הסכום של מספר הביטים הדלוקים בין i ל- j בכל המספרים במבנה הנתונים שהריבוי (דהינו מספר החזרות) שלהם הוא k, בזמן O(m logn) במקרה הגרוע, כאשר m מציין את מספר המספרים השונים במבנה שהריבוי שלהם הוא k. הנח/י שמספר הריבויים השונים במבנה הוא O(log n).

תאר/י באופן מילולי איך מתבצעת <u>כל</u> אחת מהפעולות הנ"ל.

3. (20 נקודות)

ברשת למכירת מוצרים לבית יש n עובדים ו- m סניפים. הרשת פיתחה מערכת למעקב אחרי פעילות העובדים. לכל עובד המערכת שומרת את פרטיו האישים (דהינו תעודת זהות, שם, כתובת), את הסניף שאליו העובד שיך (שהינו מספר בן 1 ל m) ואת כמות המוצרים שהעובד מכר.

הצע/הציעי מבנה נתונים עבור המערכת הנ"ל ששומר את הנתונים הנ"ל ותומך בפעולות הבאות:

- בהינתן תעודת זהות של עובד הדפסת כמות המוצרים שמכר העובד בזמן O(1) בממוצע.
- הוספת עובד חדש למערכת (כאשר נתונים ת.ז של העובד ומספר הסניף אליו הוא שיך) בזמן O(logn) במקרה הגרוע.
- בהינתן תעודת זהות של עובד ומספר כלשהו x הגדלת כמות המוצרים שהעובד מכר ב- x בזמן O(logn) בממוצע.
- בהינתן מספר סניף i ומספר כלשהו x הגדלת כמות המוצרים שמכרו כל העובדים בסניף i ב- x בזמן O(1) במקרה הגרוע.
- בהינתן מספר סניף i ומספר שלם k הדפסת k העובדים בסניף i שמכרו את מספר המוצרים הגדול ביותר בזמן O(k) במקרה הגרוע.
- בהינתן מספר שלם k הדפסת k העובדים (מתוך כל העובדים ברשת) שמכרו את מספר המוצרים הגדול ביותר בזמן O(max{m,klogk}) במקרה הגרוע.

תאר/י באופן מילולי איך מתבצעות **<u>שלושת</u>** הפעולות האחרונות.

.4 (10 נקודות)

נתונה נוסחת הנסיגה הבאה:

$$T(n) = T(\frac{n}{9}) + T(\frac{8n}{9}) + n^2$$

איזה מבין האפשרויות הבאות מתקיימת? (יתכן ומתקיימת יותר מאפשרות אחת).
הוכח/ הוכיחי את תשובתך.

א. $T(n) = \Omega(n \log^3 n)$

ב. $T(n)=\theta(n)$

ג. $T(n)=\theta(n^2)$

ד. $T(n)=\theta(n\log n)$

ה. $T(n)=\theta(n^2 \log n)$

ו. אף אחת מהתשובות אינה נכונה.

.5 (10 נקודות)

הוכח כי לכל מספר שלם n קיים עץ בינארי בעל n צמתים, כך שמספר העלים בו הוא לפחות $\frac{n+1}{4}$

6. (10 נקודות)

נגדיר את האיבר ה- i , כאיבר שנמצא במקום i כאשר מסדרים את האיברים במבנה הנתונים בסדר עולה, לפי מפתחותיהם. לדוגמא, האיבר ה- 1 הוא הקטן ביותר במבנה הנתונים והאיבר ה- n הוא האיבר הגדול ביותר במבנה הנתונים.

האם קיים עץ AVL בעל התכונות הבאות (כאשר n מציין את מספר האיברים בעץ):

כאשר נוציא מהעץ את האיבר ה- 1 יקרה גלגול RR בשורש העץ ולאחר מכן כאשר נוציא (מהעץ שהתקבל לאחר הוצאת האיבר ה- 1) את האיבר ה- n-2 יקרה גלגול מסוג RL (לא בהכרח בשורש העץ).

אם תשובתך היא כן צייר עץ כזה.
אם תשובתך היא לא, נמק מדוע לא קיים עץ כזה.

7. (10 נקודות)

יהי **T** עץ **B** (שבו **t=2**) בגובה **4** בעל מספר קטן ביותר של איברים. מהו המספר הקטן ביותר של איברים שיש להוסיף לעץ (לפי האלגוריתם שתואר בכיתה) כדי שגובה העץ יגדל ב- 1.
נמק/י את תשובתך.

<u>**הערה**</u>: גובה עץ מוגדר כמספר הצמתים במסלול הארוך ביותר מהשורש לאיזשהו עלה. לדוגמה גובה העץ שבציור בשאלה 1 הוא 5.

בהצלחה!