

מבחן מועד א' סמסטר קיץ תש"ע
מבני נתונים

- משך המבחן: שלוש וחצי שעות.
- יש לענות על כל השאלות.
- מותר השימוש בחומר עזר כלשהו פרט למחשבים (מחשבוניו מותר).
- יש להקיף על כתיבה ברורה ומסודרת של התשובות.

בהצלחה !

1. (25 נקודות)

בשאלה זו נניח שכל המפתחות בעץ בינארי הינם מספרים שלמים חיוביים.

הגדרה: נגדיר צומת x שנמצא בעץ בינארי T הוא צומת **טוב** אם מתקיימים עבורו שני התנאים הבאים:

- 1) בתת העץ השמאלי של x (דהינו בתת העץ $T_{left}(x)$) ישנו צומת שהמפתח שלו גדול ממפתחות כל הצמתים שנמצאים בתת העץ ששורשו x (דהינו בתת העץ T_x)
- 2) בתת העץ הימני של x (דהינו בתת העץ $T_{right}(x)$) ישנו צומת שהמפתח שלו קטן ממפתחות כל הצמתים שנמצאים בתת העץ ששורשו x (דהינו בתת העץ T_x)

כתוב/כתבי פסאודו-קוד לפונקציה בשם $P1$, **יעילה ככל האפשר**, אשר מקבלת כפרמטר עץ בינארי ומדפיסה את מפתחות כל הצמתים **הטובים** בעץ. (אין חשיבות לסדר הדפסת המפתחות).

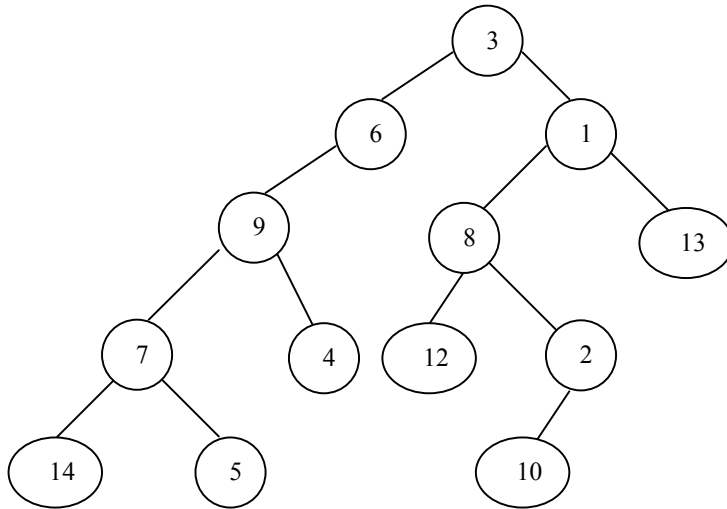
נתחי את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה שכתבת כתלות בגובה העץ (h) או במס' הצמתים בעץ (n) (בחר/י את האפשרות המתאימה לפונקציה שכתבת).

הנחות ודרישות:

- אין להשתמש במבני עזר נוספים.
- מותר להשתמש במספר קבוע של משתנים (כמו למשל x, y, z).
- מותר להשתמש בפונקציות עזר, אך יש לכתוב את הפסאודו-קוד של פונקציות העזר.
- כל צומת x בעץ מכיל את השדות הרגילים של עץ בינארי כפי שהוגדר בכיתה.

דוגמה:

יהי T העץ הבינארי שמתואר בציור הבא :



לאחר הקריאה לתוכנית $P1(T)$ יתקבל הפלט הבא:

7 9 3 8

2. (30 נקודות)

במערכת המחשוב של ספרייה שומרים נתונים על ספרים ומחבריהם. לכל ספר יש מזהה יחיד שהוא מספר קטלוגי בן 14 ספרות ולכל מחבר יש מזהה יחיד שהוא מספר בן 9 ספרות שמציין את מספר תעודת הזהות של המחבר. המערכת שומרת עבור כל ספר את שם הספר, שם המחבר, המספר הקטלוגי של הספר, תעודת הזהות של המחבר וכן את מספר העותקים של הספר שנמצאים בספרייה. כאשר ספר מושאל לקורא, מספר העותקים שלו יורד ב-1 וכאשר קורא מחזיר ספר לספרייה מספר העותקים שלו עולה ב-1. בשאלה זו נניח שלכל ספר יש רק מחבר אחד.

הצע/הציעי מבנה נתונים עבור המערכת הנ"ל ששומר את הנתונים הנ"ל ותומך בפעולות הבאות:

- בהינתן מספר קטלוגי של ספר הדפסת מספר העותקים של הספר בזמן $O(1)$ בממוצע.
- הוספת ספר חדש למערכת (כאשר פרטי הספר נתונים) בזמן $O(1)$ בממוצע.
- בהינתן מספר קטלוגי של ספר שקיים במערכת הוספת עותק נוסף של הספר בזמן $O(1)$ בממוצע.
- בהינתן מספר תעודת זהות של מחבר, הדפסת סך כל העותקים שנמצאים בספרייה ברגע ביצוע הפעולה מכל הספרים שהמחבר כתב ונמצאים ברגע זה בספרייה בזמן $O(1)$ בממוצע. לדוגמה אם המחבר כתב רק את ספרים A ו-B שנמצאים בספרייה ויש בספרייה 4 עותקים מספר A ו-7 עותקים מספר B, אך בזמן ביצוע הפעולה 2 עותקים מספר A מושאלים ו-3 עותקים מספר B מושאלים אזי הפעולה תדפיס 6.
- בהינתן מספר תעודת זהות של מחבר הדפסת כל הספרים השונים שהמחבר כתב ולפחות עותק אחד מהם נמצא ברגע ביצוע הפעולה, כאשר הספרים ממוינים בסדר עולה לפי מספר העותקים שלהם שנמצאים בספרייה ברגע ביצוע הפעולה, בזמן $O(1)$ בממוצע + $O(k)$ במקרה הגרוע, כאשר k מציין את סך כל הספרים **השונים** שהמחבר כתב ונמצאים בספרייה או מושאלים לקוראים ברגע ביצוע הפעולה. לדוגמה אם המחבר כתב ספרים A, B, C, D ומכל ספר יש בסך הכל 4 עותקים בספרייה כאשר בזמן ביצוע הפעולה, מספר A מושאל עותק אחד לקורא, מספר B מושאלים 2 עותקים לקוראים, מספר C מושאלים 3 עותקים לקוראים, ומספר D מושאלים 4 עותקים לקוראים אזי הפעולה תדפיס: C, B, A.
- בהינתן m מספרי תעודות זהות של מחברים ומספר k כך ש $k < m$, הדפסת k המחברים (מתוך m המחברים הנתונים) בעלי מספר העותקים הרב ביותר בספרייה (בזמן ביצוע הפעולה) בזמן $O(m)$ בממוצע + $O(\max\{m, k \log k\})$ במקרה הגרוע.

תארו/י באופן מילולי איך מתבצעות **שלושת** הפעולות האחרונות.

3. (15 נקודות)

נתונה נוסחת הנסיגה הבאה:

$$T(n) = T\left(\frac{3n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

איזה מבין האפשרויות הבאות מתקיימת? (יתכן ומתקיימת יותר מאפשרות אחת). הוכח/ הוכיחי את תשובתך.

א. $T(n) = \Omega(n)$

ב. $T(n) = \theta(n)$

ג. $T(n) = \theta(n^2)$

ד. $T(n) = O(n^2)$

ה. $T(n) = \theta(n \log n)$

ו. אף אחת מהתשובות אינה נכונה.

4. (15 נקודות)

הגדרה: גובה עץ מוגדר כמספר הצמתים במסלול הארוך ביותר מהשורש לאיזשהו עלה. לדוגמה, גובה העץ שבצירור של שאלה 1 הוא 5.

הגדרה: נגדיר שזוג מספרים (n, k) הוא זוג **טוב** אם n ו- k הם מספרים שלמים חיוביים

$$n = 2(2^{k+1} - 1)$$

הוכח שלכל זוג מספרים טוב (n, k) קיים עץ בינארי שגובהו $\frac{n}{2}$

ומספר העלים בו הוא בדיוק $2^k + 1$

5. (15 נקודות)

האם קיים עץ AVL T בגובה 4 שמקיים את ארבעת התנאים הבאים:

(1) כאשר נוציא מהעץ T (המקורי) את שני האיברים בעלי המפתחות הגדולים ביותר בעץ (לפי האלגוריתם שתואר בכיתה) גובה העץ יישאר ללא שינוי (דהינו גובה 4).

(2) כאשר נוציא מהעץ T (המקורי) את שני האיברים בעלי המפתחות הקטנים ביותר בעץ (לפי האלגוריתם שתואר בכיתה) גובה העץ יישאר ללא שינוי (דהינו גובה 4).

(3) כאשר נוסיף לעץ T (המקורי) שני איברים בעלי מפתחות הגדולים יותר ממפתחות כל האיברים בעץ (לפי האלגוריתם שתואר בכיתה) גובה העץ יישאר ללא שינוי (דהינו גובה 4)

(4) כאשר נוסיף לעץ T (המקורי) שני איברים בעלי מפתחות הקטנים יותר ממפתחות כל האיברים בעץ (לפי האלגוריתם שתואר בכיתה) גובה העץ יישאר ללא שינוי (דהינו גובה 4)

במידה וקיים עץ כזה יש לצייר אותו. במידה ולא קיים עץ כזה יש לנמק מדוע לא קיים עץ כזה.

הערה: גובה עץ מוגדר כמו בשאלה 4.

בהצלחה!