

מבחן מועד ב' סמסטר אביב תשע"א
מבני נתונים

- משך המבחן: שלוש וחצי שעות.
- יש לענות על כל השאלות.
- מותר השימוש בחומר עזר כלשהו פרט למחשבים (מחשבונים מותר).
- יש להקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת של התשובות.

בהצלחה !

1. (25 נקודות)

הגדרה: נגדיר את **העלה הגדול ביותר** בעץ בינארי T **כעלה** בעל המפתח הגדול ביותר מבין המפתחות של כל העלים בעץ. באופן דומה, נגדיר את **העלה הקטן ביותר** כעלה בעל המפתח הקטן ביותר מבין המפתחות של כל העלים בעץ.

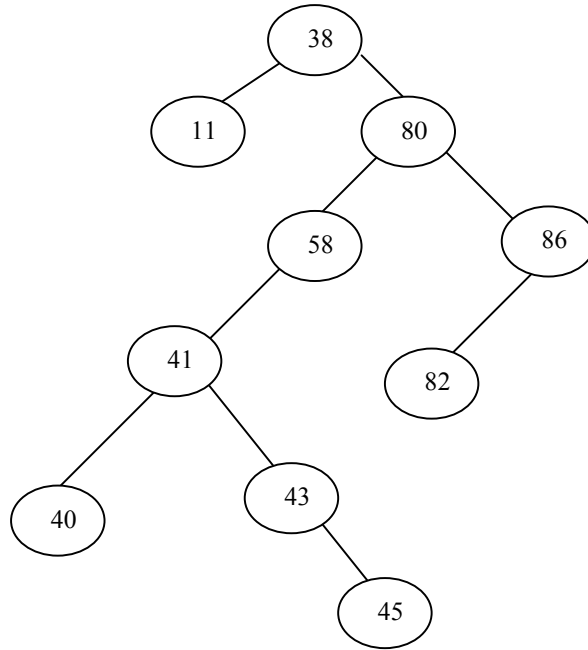
כתוב/כתבי פסאודו-קוד של פונקציה בשם $P1$, **יעילה ככל האפשר**, אשר מקבלת כפרמטר עץ **חיפוש** בינארי T (שמפתחות כל האיברים בו שונים זה מזה) ומדפיסה עבור כל צומת x בעץ את המפתח של x ולאחריו מספר שמציין את מספר הצמתים במסלול שמחבר בין העלה הקטן ביותר לעלה הגדול ביותר בתת העץ של T ששורשו x (תת העץ כולל את x). נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה שכתבת כתלות במספר האיברים בעץ n .

הנחות ודרישות:

- אין להשתמש במבני עזר נוספים.
- מותר להשתמש במספר קבוע של משתנים (כמו למשל x, y, z).
- מותר להשתמש בפונקציות עזר, אך יש לכתוב את הפסאודו-קוד של פונקציות העזר.
- כל צומת x בעץ מכיל את השדות הרגילים של עץ בינארי כפי שהוגדר בכיתה. שדות אלה **אינם כוללים** את גובה הצומת x .

דוגמה:

יהי T עץ חיפוש בינארי שמתואר בציור הבא :



לאחר הקריאה לפונקציה $P1(T)$ יתקבל הפלט הבא:

38 5 11 1 80 6 58 4 41 4 40 1 43 1 45 1 86 1 82 1

אין חשיבות לסדר הצמתים בהדפסה ולכן כל פלט שמכיל את זוגות המספרים הנ"ל בסדר אחר הינו חוקי.

2. (30 נקודות)

- כל דרישות הסיבוכיות בשאלה זו הינן עבור המקרה הגרוע.
- לכל מספר טבעי k נגדיר את $\text{bin}(n,k)$ כייצוג המספר k כמספר בינארי באורך n . לדוגמה, $\text{bin}(5,9)$ הנו המספר הבינארי 01001.
- הצע/הציעי מבנה נתונים שמכיל מספרים טבעיים (עם חזרות) ותומך בפעולות הבאות, כאשר n מיצג את אורך הייצוג הבינארי של המספרים ו- N מיצג את מספר המספרים שבמבנה:
- בהינתן מספר טבעי k וייצוגו הבינארי באורך n , הוספת המספר למבנה (בהנחה שהמספר לא קיים במבנה), בזמן $O(\max\{\log N, n \log n\})$.
 - בהינתן מספר טבעי k וייצוגו הבינארי באורך n , הוספת מופע נוסף של המספר במבנה (בהנחה שהמספר כבר מופיע לפחות פעם אחת במבנה), בזמן $O(\max\{\log N, n\})$.
 - בהינתן מספר טבעי k (ללא ייצוגו הבינארי ובהנחה שהמספר נמצא במבנה) הדפסת מספרי כל הביטים הדלוקים של המספר בייצוגו הבינארי ממוינים בסדר עולה בזמן $O(\max\{L, \log N\})$ כאשר L מציין את מספר המספרים שיודפסו. לדוגמה, בהינתן $k=9$ יודפסו המספרים: 0,3.
 - בהינתן מספר טבעי k (ללא ייצוגו הבינארי ובהנחה שהמספר קיים במבנה) הדפסת כל המספרים במבנה שמספר המופעים שלהם במבנה שווה למספר המופעים של המספר k בזמן $O(\max\{A, \log N\})$ כאשר A מציין את מספר המספרים שיודפסו.
 - עבור מספר i (בין 0 ל- $n-1$) נסמן ב- $\text{mul}(i)$ את מספר המספרים במבנה שהביט ה- i שלהם דלוק כאשר לוקחים בחשבון חזרות של מספרים במבנה. לדוגמה אם במבנה הנתונים מופיע המספר 9 חמש פעמים, והמספר 1 מופיע פעמיים (ולא מופיעים מספרים נוספים) אזי $\text{mul}(0)$ שווה ל-7, כי בסך הכול ביט מספר 0 מופיע דלוק ב-7 מופעים של מספרים במבנה. בפעולה זו, בהינתן מספר i (בין 0 ל- $n-1$) יודפסו מספרי כל הביטים (בין 0 ל- $n-1$) j שמקיימים $\text{mul}(i)=\text{mul}(j)$ בזמן $O(m)$ כאשר m מציין את מספר המספרים שיודפסו.

תארו/י באופן מילולי איך מתבצעות ארבעת הפעולות האחרונות.

3. (15 נקודות)

נתונה נוסחת הנסיגה הבאה:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{9}\right) + T\left(\frac{n}{16}\right) + 5T\left(\frac{n}{144}\right) + \sqrt{n}$$

איזה מבין האפשרויות הבאות מתקיימת? (יתכן ומתקיימת יותר מאפשרות אחת).
הוכח/ הוכיחי את תשובתך.

א. $T(n) = \theta(\sqrt{n} \log n)$

ב. $T(n) = \theta(n)$

ג. $T(n) = \theta(\sqrt{n})$

ד. $T(n) = \theta(n \log n)$

ה. $T(n) = \Omega(n)$

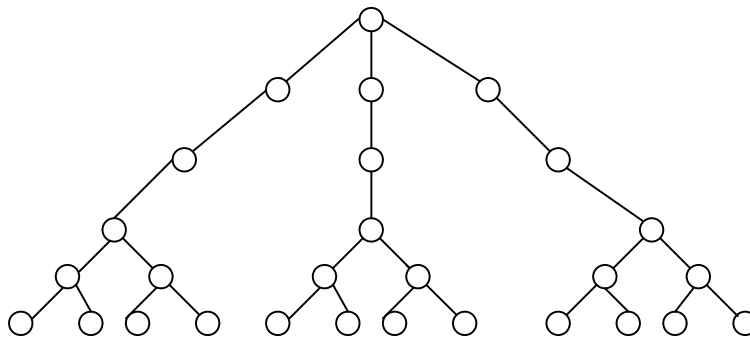
ו. $T(n) = O(n)$

ז. אף אחת מהתשובות אינה נכונה.

4. (15 נקודות)

הגדרה: עץ מסדר m הוא עץ בינארי שבו יוצאים מהשורש m מסלולים באורך m (דהינו כל מסלול מכיל m צמתים לא כולל השורש) כאשר הקצה של כל מסלול הוא שורש של עץ בינארי שלם בגובה m .

לדוגמה, עץ מסדר 3 נראה כך:



יהי T עץ מסדר m בעל n צמתים. מצא נוסחה ל- n כתלות ב- m , נמק איך הגעת לנוסחה.
בנוסף, בטא את n במונחים של θ כתלות ב- m .

5. (15 נקודות)

האם קיים עץ B (שבו $t=2$) שמקיים את שלושת התנאים הבאים:

(1) לשורש העץ T יש שלושה בנים.

(1) מספר צמתי הדמה בעץ T (דהינו צמתים שאינם עלים) הוא בדיוק 12.

(2) קיימים 4 איברים שאם נוסיף אותם לעץ T (המקורי), לפי האלגוריתם שתואר בכיתה, גובה העץ יגדל ב-1.

במידה וקיים עץ כזה יש לצייר אותו ולציין מיהם האיברים שיש להוסיף לעץ כדי שהגובה שלו יגדל ב-1. במידה ולא קיים עץ כזה יש לנמק מדוע אין עץ כזה.

בהצלחה!