

**מבחן מועד ב' סמסטר אביב תשע"ג**  
**מבני נתונים**

- משך המבחן: שלוש וחצי שעות.
- יש לענות על כל השאלות.
- מותר השימוש בחומר עזר כלשהו פרט למחשבים (מחשבונים מותר).
- יש להקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת של התשובות.

בהצלחה !

**1. (25 נקודות)**

נגדיר **רמה** של צומת בעץ בינארי  $T$  כמספר הצמתים במסלול המחבר בין הצומת לשורש העץ. לדוגמה הרמה של שורש העץ היא 1, והרמה של הצומת שהמפתח שלה הוא 22 בדוגמה שבציור בעמוד הבא היא 3.

נגדיר **מקסימום בין גובה לרמה** של צומת בעץ בינארי  $T$  כמקסימום בין הגובה לרמה של הצומת בעץ. לדוגמה, בעץ שבציור בעמוד הבא המקסימום בין גובה לרמה של הצומת שהמפתח שלה הוא 18 הוא 4 והמקסימום בין גובה לרמה של הצומת שהמפתח שלה הוא 13 הוא 4.

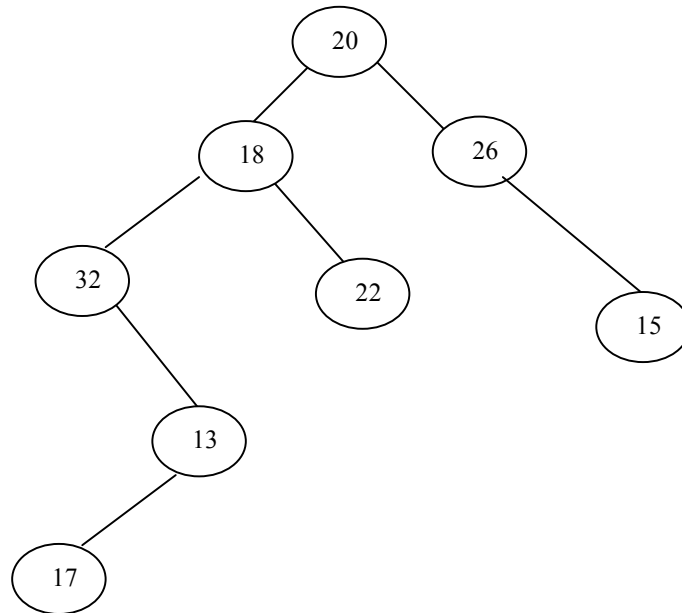
כתוב/כתבי פסאודו-קוד של פונקציה בשם  $P1$ , **יעילה ככל האפשר**, אשר מקבלת כפרמטר עץ בינארי  $T$  ומדפיסה את הסכום של המקסימום בין גובה לרמה של כל הצמתים בעץ. נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה שכתבת כתלות במספר האיברים בעץ  $n$ .

הנחות ודרישות:

- אין להשתמש במבני עזר נוספים.
- מותר להשתמש במספר קבוע של משתנים (כמו למשל  $x, y, z$ ).
- מותר להשתמש בפונקציות עזר, אך יש לכתוב את הפסאודו-קוד של פונקציות העזר.
- כל צומת  $x$  בעץ מכיל את השדות הרגילים של עץ בינארי כפי שהוגדר בכיתה.

דוגמה:

יהי  $T$  עץ בינארי שמתואר בציור הבא :



לאחר הקריאה לפונקציה  $P1(T)$  יתקבל הפלט: 29.

**הסבר לפלט:** הפלט הנ"ל התקבל מהסכום:  $5 + 4 + 3 + 4 + 3 + 5 + 2 + 3$   
שמתאר את המקסימום בין גובה לדמה של הצמתים: 17, 13, 32, 18, 22, 20, 26, 15 בהתאמה.

## 2. (30 נקודות)

במערכת המחשוב של משרד התירות בסלובניה שומרים נתונים על תירים, מדינות אליהן שיכים התירים, אתרי התירות (בסלובניה) וביקורי התירים באתרי התירות (בסלובניה). עבור כל תיר שומרים: מספר דרכון (משמש לזיהוי התיר), המדינה אליה השייך התיר, כתובתו ופרטים על כל האתרים בסלובניה שבהם ביקר התיר. עבור כל מדינה שומרים: שם המדינה (משמש לזיהוי המדינה) ופרטים על האתרים (בסלובניה) בהם ביקרו התירים השייכים למדינה. עבור כל אתר תירות (בסלובניה) שומרים: שם האתר (משמש לזיהוי האתר), ופרטים על ביקורי התירים באתר.

**הערה:** האופן בו נשמרים הנתונים הנ"ל אינו מפורט, ויהיה עליך לציין אותו כחלק מפתרון השאלה.

הצע/הציעי מבנה נתונים עבור המערכת הנ"ל ששומר את הנתונים הנ"ל ותומך בפעולות הבאות:

- בהינתן מספר דרכון של תייר ושם אתר (בסלובניה) הוספת/מחיקת ביקור אחד של התייר באתר בזמן  $O(\log)$  בממוצע, כאשר  $s$  מציין את מספר האתרים (בסלובניה) שנמצאים במערכת המחשוב של משרד התירות בזמן ביצוע הפעולה.
- בהינתן מספר  $k$ , הדפסת  $k$  האתרים (בסלובניה) שמספר המבקרים הכולל בהם (עד זמן ביצוע הפעולה) הוא הגדול ביותר, בזמן  $O(k)$  במקרה הגרוע ביותר.
- בהינתן שם מדינה, הדפסת האתרים (בסלובניה) שבהם ביקרו התירים השייכים למדינה ממוינים לפי מספר הביקורים בסדר עולה, בזמן  $O(s)$  בממוצע, כאשר  $s$  מציין את מספר האתרים (בסלובניה) שנמצאים במערכת המחשוב של משרד התירות בזמן ביצוע הפעולה.
- בהינתן שם אתר (בסלובניה) הדפסת רשימת המדינות שמהן הגיעו מבקרים לאתר ממוינות לפי מספר הביקורים בסדר עולה, בזמן  $O(c)$  בממוצע, כאשר  $c$  מציין את מספר המדינות מהן הגיעו תירים לאתר לפי מערכת המחשוב של משרד התירות בזמן ביצוע הפעולה.

בנוסף לתאור מבנה הנתונים שהצעת, תאר/י באופן מילולי איך מתבצעות כל ארבעת הפעולות הנ"ל.

### 3. (15 נקודות)

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם  $P3(n)$  שמקבלת כפרמטר מספר  $n$ . הפונקציה קוראת לפונקצית עזר בשם  $F(m)$  שמקבלת כפרמטר מספר  $m$  ומתוארת בהמשך. נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה  $P3(n)$  כתלות ב-  $n$  (במונחים של ה-  $O$  הקטן ביותר שאתה/את יודע/ת להשיג).

$P3(n)$

-----

$x=0$

$i=1$

while ( $i \leq 2^n$ )

{

$x = x + n \cdot F(i)$

$i = i \cdot 2$

}

return  $x$

$F(m)$

-----

$s=0$

for ( $i = 1; i \leq m; i++$ )

{

$s++$

}

return  $s + F\left(\frac{m}{2}\right)$

#### 4. (15 נקודות)

**הגדרה:** גובה עץ מוגדר כמספר הצמתים במסלול הארוך ביותר מהשורש לאיזשהו עלה. לדוגמה, גובה העץ שבציור של שאלה 1 הוא 5.

הוכח שלכל מספר שלם חיובי  $n$  שמתחלק ב-4 (ללא שארית) קיים עץ בינארי בעל  $n$  צמתים

שגובהו גדול או שווה ל-  $\frac{n}{4} + \log_2\left(\frac{n+4}{8}\right)$  מספר העלים בו

הוא לפחות  $\frac{n+4}{8}$

יש בו לפחות  $\frac{n}{2}$  צמתים שהרמה שלהם גדולה מ-  $\frac{n}{4}$

(כאשר רמה של צומת בעץ מוגדרת כמו בשאלה 1).

## 5. (15 נקודות)

### חלק א (8 נקודות)

שאלה זו מתייחסת להוצאה/הוספה של איברים בעץ AVL לפי האלגוריתמים שנלמדו בכיתה.

האם קיים עץ AVL T שמקים את שלושת התנאים הבאים:

- (1) מספר הצמתים בעץ (גם עלה נחשב צומת) הוא בדיוק 15.
- (2) קיימים שני צמתים בעץ כך שאם נוציא אותם מהעץ המקורי T אחד אחרי השני גובה העץ ישאר ללא שינוי.
- (3) לא קיימים שני צמתים כך שאם נוסיף אותם לעץ המקורי T אחד אחרי השני גובה העץ יגדל ב-1.

אם תשובתך היא כן צייר עץ כזה.  
אם תשובתך היא לא, נמק מדוע לא קיים עץ כזה.

### חלק ב (7 נקודות)

שאלה זו מתייחסת להוצאה של איברים מעץ B לפי החומר ללימוד עצמי שנמצא באתר הקורס.

יהי T עץ B (שבו  $t=2$ ) שמקיים את התנאים הבאים:

- (1) לשורש יש בדיוק 3 בנים.
- (2) מספר צמתי הדמה בעץ הוא בדיוק 12.
- (3) מספר העלים בעץ הוא בדיוק 16.

מהו המספר הקטן ביותר של איברים שיש להוציא מהעץ (אחד אחרי השני) כדי שגובה העץ יקטן ב-1. נמק את תשובתך על ידי ציור העץ T וציון הצמתים שצריך להוציא מהעץ כדי שגובהו יקטן ב-1.

**בהצלחה!**