<u>מבחן מועד ב' סמסטר אביב תשע"ד</u>

<u>מבני נתונים</u>

- משך המבחן: שלוש וחצי שעות.
- יש לענות על כל השאלות.
- מותר השימוש בחומר עזר כלשהו פרט למחשבים (מחשבונים מותר).
- יש להקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת של התשובות.

בהצלחה !

<u>1. (25 נקודות)</u>

<u>הגדרה</u>: נגדיר **<u>עץ בינארי עם צבעים אדום-לבן</u>**, כעץ בינארי שבו לכל צומת x יש בנוסף לשדות הרגילים, שדה color(x) ששווה ל- red אם הצומת אדום או white אם הצומת לבן.

<u>הגדרה:</u> עבור צומת x בעץ בינארי T נגדיר את **<u>תת העץ השמאלי של x</u>** כתת העץ של T שמורכב מהבן השמאלי של x וכל הצמתים שמתחתיו. במילים אחרות, תת העץ השמאלי של x שווה ל- $T_{left(x)}$ וכולל גם את left(x). באופן דומה נגדיר את **<u>תת העץ הימני של x</u>** כתת העץ של T שמורכב מהבן הימני של x וכל הצמתים שמתחתיו.

<u>הגדרה</u>: נגדיר שצומת x בעץ בינארי עם צבעים אדום-לבן T הוא צומת **<u>טוב</u>** אם סכום הגבהים של כל הצמתים הלבנים בתת העץ השמאלי של x גדול יותר מסכום הגבהים של כל הצמתים האדומים בתת העץ הימני של x.

כתוב/כתבי פסאודו-קוד של פונקציה בשם P1, **<u>יעילה ככל האפשר</u>**, אשר מקבלת כפרמטר עץ בינארי עם צבעים אדום-לבן T ומדפיסה את המפתחות של כל הצמתים **<u>הטובים</u>** בעץ T.

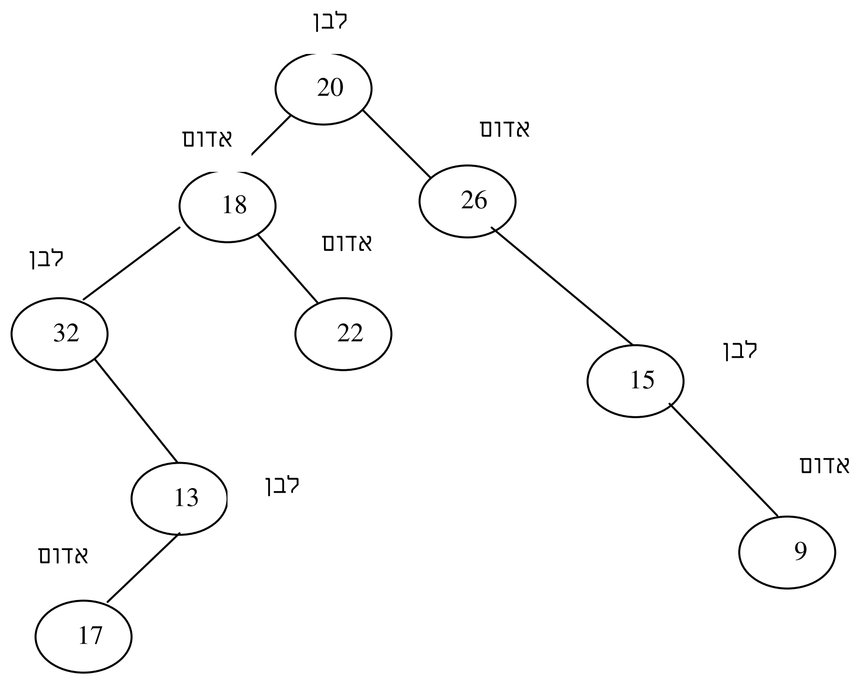
אין חשיבות לסדר ההדפסה של הצמתים בפלט.

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה שכתבת כתלות במספר הצמתים בעץ **n**.

<u>הנחות ודרישות:</u>
- אין להשתמש במבני עזר נוספים.
- מותר להשתמש במספר קבוע של משתנים (כמו למשל x,y,z).
- מותר להשתמש בפונקציות עזר, אך יש לכתוב את הפסיאודו-קוד של פונקציות העזר.
- כל צומת x בעץ מכיל את השדות הרגילים של עץ בינארי כפי שהוגדר בכיתה ובנוסף מכיל את השדה color(x) שתואר לעיל.

דוגמה:

יהי T עץ בינארי עם צבעים אדום-לבן שמתואר בציור הבא :



לאחר הקריאה לפונקציה P1(T) יתקבל הפלט:

```
20 18
```

הסבר לפלט: עבור צומת 20 סכום הגבהים של הצמתים הלבנים בתת העץ השמאלי שווה ל- 5 וסכום הגבהים של הצמתים האדומים בתת העץ הימני שווה ל- 4 ולכן צומת 20 הוא טוב.

עבור צומת 18 סכם הגבהים של הצמתים הלבנים בתת העץ השמאלי שווה ל- 5 וסכום הגבהים של הצמתים האדומים בתת העץ הימני שווה ל- 1 ולכן צומת 18 הוא צומת טוב.

עבור צומת 32 סכום הגבהים של הצמתים הלבנים בתת העץ השמאלי שווה ל-0 וסכום הגבהים של הצמתים בתת העץ הימני שווה ל-1 ולכן צומת 32 אינו צומת טוב.

2. (30 נקודות)

במערכת המחשוב של משרד החוץ שומרים נתונים על ההפגנות בעד/נגד ישראל שהתקיימו בחמישים השנה האחרונות.

ניתן להניח שמספר השנים שבהן שומרים נתונים על ההפגנות הוא לכל היותר חמישים והוא קבוע.

עבור כל הפגנה שומרים: תאריך ההפגנה, המדינה בה התקיימה ההפגנה, העיר בה התקיימה ההפגנה, מספר המשתתפים בהפגנה והאם ההפגנה הייתה בעד או נגד ישראל.

ניתן להניח שבתאריך מסוים בעיר מסוימת במדינה מסוימת מתקיימת רק הפגנה אחת, ולכן הצרוף של התאריך העיר והמדינה משמשים לזיהוי ההפגנה.

<u>הערה</u>: האופן בו נשמרים הנתונים הנ״ל אינו מפורט, ויהיה עליך לציין אותו כחלק מפתרון השאלה.

הצע/הציעי מבנה נתונים עבור המערכת הנ״ל ששומר את הנתונים הנ״ל ותומך בפעולות הבאות:

- בהינתן נתוני הפגנה שעדיין לא עודכנה במערכת שכוללים: תאריך, מדינה, עיר, מספר משתתפים והאם ההפגנה היא בעד או נגד ישראל, הוספת נתוני ההפגנה למערכת בזמן $O(\log x+\log z)$ בממוצע כאשר x מציין את מספר הערים במדינה שבהן היו הפגנות בשנה שמתאימה לתאריך ההפגנה, ו- z מציין את מספר המדינות שבהן היו הפגנות (לא בהכרח בשנה שמתאימה לתאריך ההפגנה).
- בהינתן פרטי הפגנה שכוללים: תאריך, שם מדינה, שם עיר שנתוניה קיימים במערכת, הוצאת נתוני ההפגנה מהמערכת בזמן $O(\log x+\log z)$ בממוצע כאשר x מציין את מספר הערים במדינה שבהן היו הפגנות בשנה שמתאימה לתאריך ההפגנה, ו- z מציין את מספר המדינות שבהן היו הפגנות (לא בהכרח בשנה שמתאימה לתאריך ההפגנה).
- בהינתן שנה הדפסת מספר כל ההפגנות בעד ישראל שהשתתפו בהן למעלה מ- 1000 איש בשנה זו, בזמן $O(1)$ במקרה הגרוע ביותר.
- בהינתן שם מדינה ושנה הדפסת כל הערים במדינה זו שבהן היו הפגנות בעד ישראל בשנה זו, ממוינות לפי סך כל מספר המשתתפים ההפגנות בעד ישראל שהיו בשנה זו במדינה זו בערים אלו, בזמן $O(y)$ בממוצע, כאשר y מציין את מספר הערים ברשימה שתודפס.
- בהינתן שנה הדפסת k המדינות שבהן מספר ההפגנות נגד ישראל בשנה זו היה הגדול ביותר, בזמן $O(n+k\log k)$ במקרה הגרוע, כאשר n מציין את מספר המדינות שבהן היו הפגנות נגד ישראל בשנה זו.
- בהינתן מדינה, הדפסת כל ההפגנות שהיו במדינה בעד או נגד ישראל בזמן $O(\log z+p)$ במקרה הגרוע כאשר z מציין את מספר המדינות שבהן היו הפגנות, ו- p מציין את מספר ההפגנות ברשימה שתודפס.

בנוסף לתאור מבנה הנתונים שהצעת, תאר/י באופן מילולי איך מתבצעת הפעולה הראשונה ושלושת הפעולות האחרונות.

3. (15 נקודות)

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם $P3(n)$ שמקבלת כפרמטר מספר n.
הפונקציה קוראת לפונקצית עזר בשם $F(m)$ שמקבלת כפרמטר מספר m ומתוארת בהמשך . נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה $P3(n)$ כתלות ב- n (במונחים של ה- O הקטן ביותר שאתה/את יודע/ת להשיג).

```
P3(n)
-------
x=0
for (i = 1; i ≤ n; i++) {
  for (j = 1; j ≤ n; j++) {
     x=x+F(i)
  }
}
return x
```

```
F(m)
-------
s=0
for (i = 1; i ≤ 2^m; i=i*2)
   {
   for (j = 1; j ≤ 2^(2m); j=j*2)
     {
        s++
     }
   }
return s
```

4. (15 נקודות)

הגדרה: גובה עץ T מוגדר כמספר הצמתים במסלול הארוך ביותר מהשורש לאיזשהו עלה.
גובה של צומת x בעץ T מוגדר כגובה תת העץ של T ששורשו x (תת העץ כולל את x).
לדוגמה, גובה העץ שבציור של שאלה 1 הוא 5, וגובה צומת 18 בעץ הוא 4.

הוכח שלכל מספר שלם חיובי n שמתחלק ב- 4 (ללא שארית) וגדול מ- 31 קיים עץ בינארי שמקיים את כל חמשת התנאים הבאים:

1) מספר הצמתים בעץ הוא בדיוק n.

2) יש בעץ לפחות $\frac{n}{2} + \log_2(n/4)$ צמתים שהגובה שלהם גדול או שווה ל- n/4.

3) יש בעץ לפחות 5n/16 צמתים שהמרחק שלהם מהשורש גדול או שווה ל- $\frac{n}{2} + \log_2(n/4) - 1$

4) מספר העלים בעץ גדול או שווה ל- n/16

5) יש בעץ לפחות n/2 צמתים שיש להם בן אחד בדיוק.

5. (15 נקודות)

שאלה 5 חלק א (8 נקודות)

שאלה זו מתייחסת להוצאה/הוספה של איברים בעץ AVL לפי **האלגוריתמים שנלמדו בכיתה**.

האם קיים עץ AVL T שמקים את כל 5 התנאים הבאים:

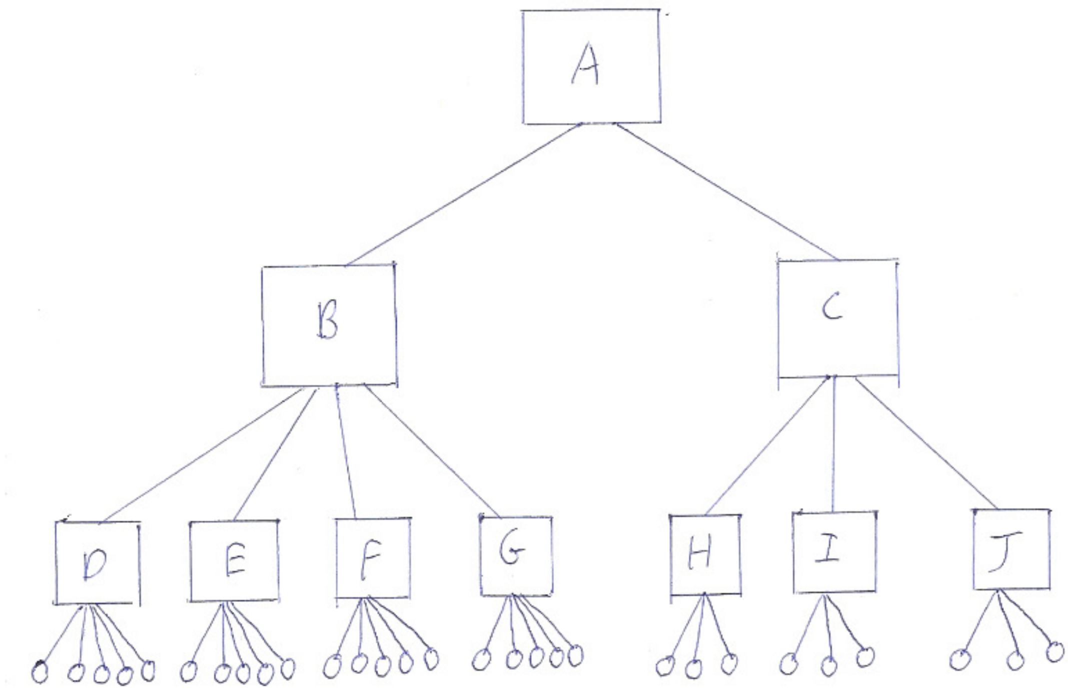
1) גובה העץ הוא בדיוק 4.
2) כאשר מוסיפים לעץ המקורי צומת קטן יותר מכל האיברים בעץ מתבצע גלגול.
3) כאשר מוסיפים לעץ המקורי צומת גדול יותר מכל האיברים בעץ גובה העץ גדל ב-1.
4) לא קיימים חמישה צמתים כך שכאשר מוציאים אותם מהעץ המקורי גובה העץ קטן ב- 1.

אם תשובתך היא כן צייר עץ כזה.
אם תשובתך היא לא, נמק מדוע לא קיים עץ כזה.

<u>שאלה 5 חלק ב (7 נקודות)</u>

שאלה זו מתייחסת להוצאה של איברים מעץ B לפי **<u>החומר ללימוד עצמי שנמצא באתר הקורס</u>**.

יהי T עץ B (שבו **t=3**) שמתואר בציור הבא:



מהו המספר הקטן ביותר של איברים שיש להוציא מהעץ (אחד אחרי השני) כדי שגובה העץ יקטן ב- 1. נמק את תשובתך על ידי ציור העץ T וציון הצמתים שצריך להוציא מהעץ כדי שגובהו יקטן ב- 1.

בהצלחה!