<u>מבחן מועד ב' סמסטר אביב תשע"ה</u>

<u>מבני נתונים</u>

- משך המבחן: שלוש וחצי שעות.
- יש לענות על כל השאלות.
- מותר השימוש בחומר עזר כלשהו פרט למחשבים (מחשבונים מותר).
- יש להקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת של התשובות.

בהצלחה !

<u>1. (25 נקודות)</u>

<u>הגדרה</u>: נגדיר עץ בינארי אדום לבן, כעץ בינארי שבו לכל צומת **x**, בנוסף לשדות הרגילים, יש שדה צבע **color(x)** שהוא אדום (**red**) או לבן (**white**).

<u>הגדרה:</u> נגדיר שמסלול **P** בעץ בינארי אדום לבן הוא מסלול **מתחלף** אם אין במסלול שני צמתים עוקבים עם צבע זהה.

לדוגמה, המסלול שמחבר בין הצמתים 19 ו- 20 בעץ שבציור בעמוד הבא הוא מסלול מתחלף, והמסלול שמחבר בין הצמתים 26 ו- 22 אינו מסלול מתחלף.

כתוב/כתבי פסאודו-קוד של פונקציה בשם P1, **<u>יעילה ככל האפשר</u>**, אשר מקבלת כפרמטר עץ בינארי אדם לבן **T** ומדפיסה את מספר הצמתים במסלול המתחלף הארוך ביותר שמחבר בין שני צמתים בעץ.

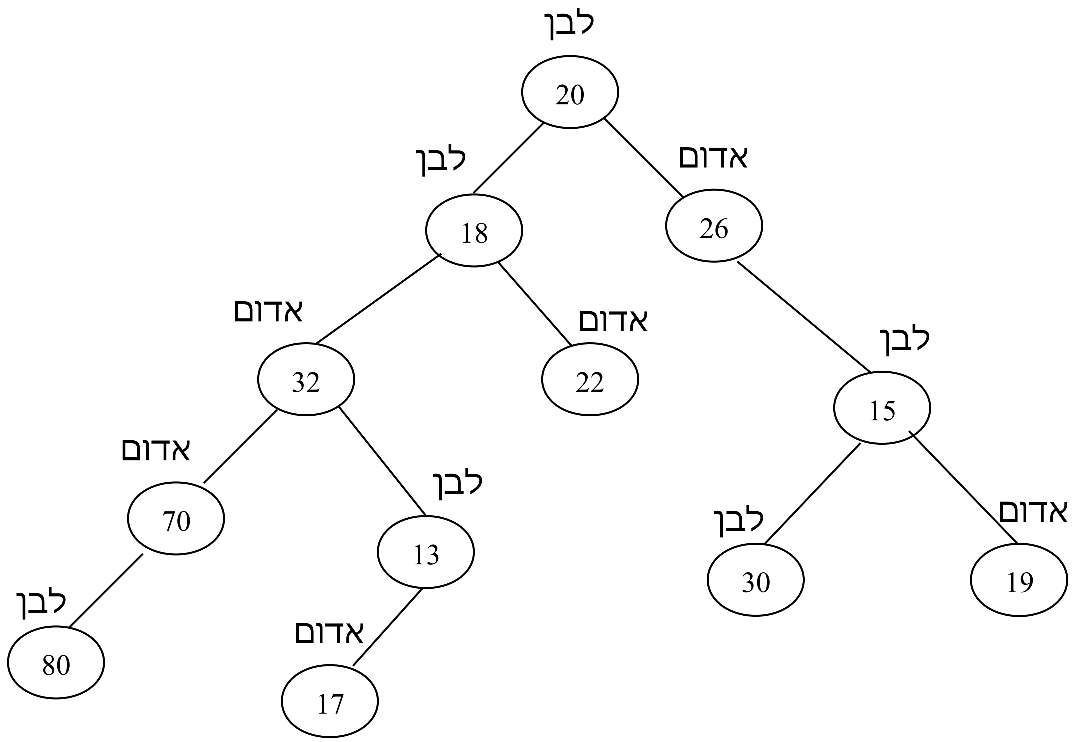
נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה שכתבת כתלות במספר הצמתים בעץ **n**.

<u>הנחות ודרישות:</u>

- אין להשתמש במבני עזר נוספים.
- מותר להשתמש במספר קבוע של משתנים (כמו למשל x,y,z).
- מותר להשתמש בפונקציות עזר, אך יש לכתוב את הפסיאודו-קוד של פונקציות העזר.
- כל צומת x בעץ מכיל את השדות הרגילים של עץ בינארי כפי שהוגדר בכיתה, ובנוסף את השדה color(x) שתואר למעלה.

<u>דוגמה:</u>

יהי **T** עץ בינארי אדום לבן שמתואר בציור הבא :



לאחר הקריאה לפונקציה **P1(T)** יתקבל הפלט: **5**

<u>הסבר לפלט</u>: המסלול המתחלף הארוך ביותר בעץ הוא המסלול הבא שמחבר בין 17 ל- 22: **17 13 32 18 22**

מסלול זה מכיל 5 צמתים ולכן הפלט הוא 5.

2. (30 נקודות)

לקראת תחילת שנת הלימודים תשע"ו הוחלט במשרד החינוך להקים מערכת מחשוב ששומרת נתונים לגבי לימודי המתמטיקה בבתי הספר השונים בישראל כפי שמתואר בהמשך.

לכל שנה שומרים את נתוני התלמידים שסימו כיתה י"ב בשנה זו, כאשר לכל תלמיד שומרים: שם פרטי ושם משפחה (משמשים לזיהוי התלמיד), שם בית הספר בו הוא למד, האם סיים בגרות במתמטיקה, ובמידה וכן מה הציון שלו במתמטיקה ובכמה יחידות הוא נבחן. ניתן להניח שהציון הוא מספר שלם בין 0 ל- 100 ומספר היחידות הוא מספר שלם בין 3 ל-5.

לכל בית ספר שם בית הספר משמש לזיהוי בית הספר.

אין להניח שמספר השנים שבהם שומרים נתונים על בית הספר הוא קבוע. ניתן להניח שמספר הציונים האפשריים הוא **<u>קבוע</u>** ושווה ל- 101, וכן שמספר היחידות במתמטיקה האפשריות להבחן עליהן בבגרות הוא **<u>קבוע</u>** ושווה ל- 3.

<u>הערה</u>: האופן בו נשמרים הנתונים הנ"ל אינו מפורט ויהיה עליך לציין אותו כחלק מפתרון השאלה.

הצע/הציעי מבנה נתונים עבור המערכת הנ"ל ששומר את הנתונים הנ"ל ותומך בפעולות הבאות:

- הוספת/הוצאת הציון שתלמיד מסוים שלומד בבית ספר מסוים קיבל בשנה מסוימת בבגרות במתמטיקה במספר יחידות מסוים בזמן O(logx+logz) בממוצע כאשר x מציין את מספר בתי הספר ו- z מתאר את מספר השנים שבהם שומרים נתונים במערכת על ציוני המתמטיקה בבתי הספר.
- בהינתן שם בית ספר הדפסת נתונים על השנים שעבורן שומרים נתונים במערכת על בית הספר כאשר עבור כל שנה מודפס: אחוז התלמידים שסימו 3 יחידות מתמטיקה בשנה זו בבית ספר זה, אחוז התלמידים שסימו 4 יחידות מתמטיקה בשנה זו בבית ספר זה, ואחוז התלמידים שסימו 5 יחידות מתמטיקה בשנה זו בבית ספר זה. על הרשימה להיות ממוינת לפי אחוז התלמידים שסימו 5 יחידות מתמטיקה בסדר עולה. את הנתונים הנ"ל יש להדפיס בזמן O(y) בממוצע כאשר y מצין את מספר השנים ברשימה שתודפס.
- בהינתן שנה, הדפסת בתי הספר ששומרים עבורם נתונים במערכת בשנה זו, כאשר עבור כל בית ספר מודפס: ממוצע הציונים של התלמידים שלמדו 3 יחידות מתמטיקה בשנה זו, ממוצע הציונים של התלמידים שלמדו 4 יחידות מתמטיקה בשנה זו וממוצע הציונים של התלמידים שלמדו 5 יחידות מתמטיקה בשנה זו. על הרשימה להיות ממוינת לפי ממוצע הציונים ב- 5 יחידות מתמטיקה בסדר עולה. את הנתונים הנ"ל יש להדפיס בזמן O(s) בממוצע, כאשר s מציין את מספר בתי הספר ברשימה שתודפס.
- בהינתן שנה ומספר k הדפסת k התלמידים שקיבלו ציון גבוה ביותר ב- 5 יחידות מתמטיקה בשנה זו בזמן O(n+klogk) כאשר n מצין את מספר התלמידים שסימו 5 יחידות מתמטיקה בשנה זו.

בנוסף לתאור מבנה הנתונים שהצעת, תאר/י באופן מילולי איך מתבצעות שלושת הפעולות האחרונות.

3. (15 נקודות)

נזכיר שסכום סדרה חשבונית בעלת **n** איברים ניתן לחישוב על ידי הנוסחה הבאה:

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם **P3(n)** שמקבלת כפרמטר מספר **n**.
הפונקציה קוראת לפונקצית עזר בשם **F(m)** שמקבלת כפרמטר מספר **m** ומתוארת בהמשך.

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה **P3(n)** כתלות ב- **n** (במונחים של ה- **O** הקטן ביותר שאתה/את יודע/ת להשיג).

P3(n)

```
-----
x=0
for (i = 1; i ≤ n ; i++) {
  for (j = 1; j ≤ 2i ; j++) {
      x=x+2
  }
}

z=0
for (i = 1; i ≤ n ; i=i·2) {
  z=z+i·F(x)
}

return z
```

F(m)

```
----
if (m≤1) {return 1}
s=0
for (i = 1; i ≤  2^m ; i++)
   {
     s=s+i
   }
return  s+F(m/4)
```

4. (15 נקודות)

הגדרה: גובה עץ T מוגדר כמספר הצמתים במסלול הארוך ביותר מהשורש לאיזשהו עלה. גובה של צומת x בעץ T מוגדר כגובה תת העץ של T ששורשו x (תת העץ כולל את x). לדוגמה, גובה העץ שבציור של שאלה 1 הוא 5, וגובה צומת 18 בעץ הוא 4.

הוכח שלכל מספר שלם חיובי n שמתחלק ב- 5 (ללא שארית) וגדול מ- 32 קיים עץ בינארי שמקיים את כל ארבעת התנאים הבאים:

1) מספר הצמתים בעץ הוא בדיוק n.

2) יש בעץ לפחות $\frac{n}{20}$ צמתים שהרמה שלהם גדולה מ- $\log_2(\frac{n}{5})-2$ וקטנה מ- $\log_2(\frac{n}{5})+1$.

3) יש בעץ לפחות $\frac{n}{20}$ צמתים שהרמה שלהם גדולה מ- $\frac{2n}{5}+3\cdot\log_2(\frac{n}{5})-4$ וקטנה מ- $\frac{2n}{5}+3\cdot\log_2(\frac{n}{5})+4$

4) יש בעץ לפחות $\log_2\frac{n}{5}$ צמתים שהגובה שלהם גדול מ- $\frac{2n}{5}+2\cdot\log_2(\frac{n}{5})$.

5) יש בעץ לפחות $\frac{n}{9}-2$ עלים.

5. (15 נקודות)

שאלה זו מתייחסת להוספה/הוצאה של איברים לעץ/מעץ **AVL** לפי אלגוריתמי ההוספה/הוצאה שנלמדו בכיתה.

האם קים עץ AVL שמקיים את **כל** התכונות הבאות:

1. גובה העץ הוא 5.
2. קיימים 4 צמתים כך שאם נוסיף אותם לעץ גובה העץ יגדל ב- 1.
3. קיימים 4 צמתים כך שאם נוציא אותם מהעץ גובה העץ יקטן ב- 1.

במידה וקיים עץ כזה יש לציר את העץ ולציין איזה צמתים יש להוסיף לעץ כדי שהגובה יגדל ב- 1 ואיזה צמתים יש להוציא מהעץ כדי שהגובה יקטן ב-1.

במידה ולא קיים עץ כזה יש לנמק למה לא קיים עץ כזה.

בהצלחה!