מבחן מועד ב' סמסטר אביב תשע"ו

מבני נתונים

- משך המבחן: שלוש וחצי שעות.
- יש לענות על כל השאלות.
- מותר השימוש בחומר עזר כלשהו פרט למחשבים (מחשבונים מותר).
- יש להקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת של התשובות.

בהצלחה !

1. (25 נקודות)

הגדרה: נגדיר עץ בינארי אדום לבן, כעץ בינארי שבו לכל צומת x, בנוסף לשדות הרגילים, יש שדה צבע color(x) שהוא אדום (red) או לבן (white).

כתוב/כתבי פסאודו-קוד של פונקציה בשם P1, יעילה ככל האפשר, אשר מקבלת כפרמטר עץ בינארי אדום לבן T ומדפיסה עבור כל צומת x בעץ T את המפתח של הצומת x, את מספר הצמתים האדומים שנמצאים במסלול שמתחיל באבא של צומת x ומטפס למעלה עד שורש העץ, ואת מספר הצמתים הלבנים שנמצאים בתת העץ ששורשו x, דהינו בתת העץ T_x (תת העץ T_x כולל גם את צומת x).

אין חשיבות לסדר הצמתים בפלט.

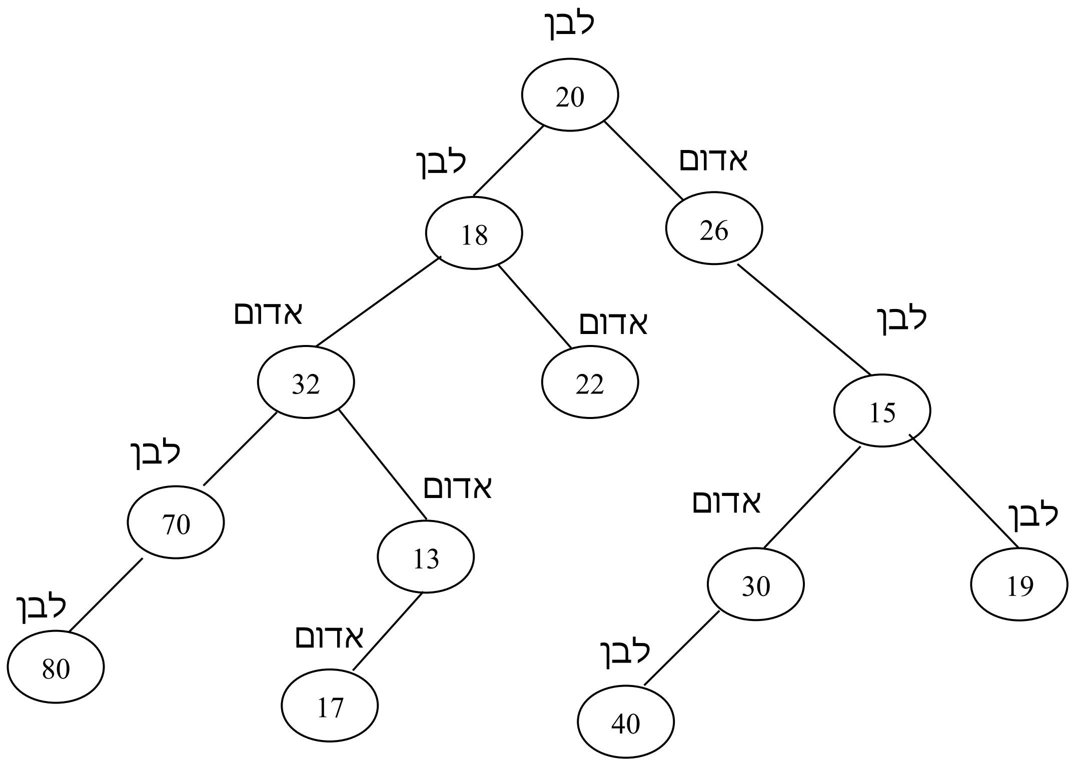
נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה שכתבת כתלות במספר הצמתים בעץ n.

הנחות ודרישות:

- אין להשתמש במבני עזר נוספים.
- מותר להשתמש במספר קבוע של משתנים (כמו למשל x,y,z).
- מותר להשתמש בפונקציות עזר, אך יש לכתוב את הפסיאודו-קוד של פונקציות העזר.
- כל צומת x בעץ מכיל את השדות הרגילים של עץ בינארי כפי שהוגדר בכיתה, ובנוסף את השדה color(x) שתואר לעיל.

<u>דוגמה:</u>

יהי **T** עץ בינארי אדום לבן שמתואר בציור הבא :



לאחר הקריאה לפונקציה **P1(T)** יתקבל הפלט:

```
20 0 7
18 0 3
22 0 0
32 0 2
13 1 0
17 2 0
70 1 2
80 1 1
26 0 3
15 1 3
30 1 1
40 2 1
19 1 1
```

<u>הסבר לפלט</u>: עבור הצומת שהמפתח שלה 20 אין צמתים אדומים במסלול שמתחיל מהאבא שלה ולכן הודפס המספר 0, מספר הצמתים הלבנים בתת העץ ששורשו 20 (כולל 20) הוא 7. עבור הצומת שהמפתח שלה הוא 40 מספר הצמתים האדומים (לא בהכרח ברצף) במסלול שמתחיל מהאבא שלה ומטפס לשורש הוא 2 (בגלל הצמתים 26 ו- 30) ומספר הצמתים הלבנים בתת העץ ששורשו 40 (כולל 40) הוא 1.

2. (30 נקודות)

במערכת המחשוב של הוועד האולימפי שומרים נתונים על האולימפידות השונות מאז שהחלו במתכונת המודרנית בשנת 1894, כפי שמתואר בהמשך.

לכל משתתף שומרים: שם המשתתף (משמש לזיהוי המשתתף), המדינה אליה שיך המשתתף, וכן נתונים על האולימפיאדות שבהן השתתף ועל המדליות שבהן זכה.

הנח/הניחי שכל משתתף מיצג בכל האולימפיאדות את אותה המדינה.

לכל ענף ספורט שומרים: שם הענף (משמש לזיהוי הענף), וכן נתונים על כל התחרויות שהתקימו בענף במסגרת כל האולימפיאדות, ונתונים על הזוכים במדליות בתחרויות אלו.

לכל מדינה שומרים: שם המדינה (משמש לזיהוי המדינה), וכן נתונים על כל המדליות בכל האולימפיאדות שניתנו למשתתפים שיצגו את המדינה.

לכל אולימפיאדה שומרים: שם ותאריך האולימפיאדה (משמשים לזיהוי האולימפיאדה), וכן נתונים על הזוכים במדליות בכל התחרויות שהקימו באולימפיאדה.

<u>הערה</u>: האופן בו נשמרים הנתונים הנ"ל אינו מפורט ויהיה עליך לציין אותו כחלק מפתרון השאלה.

המשך בעמוד הבא...

הצע/הציעי מבנה נתונים עבור המערכת הנ"ל ששומר את הנתונים הנ"ל ותומך בפעולות הבאות:

- הוספת/הוצאת הנתון שמשתתף מסוים באולימפיאדה מסוימת זכה במדליה בתחרות ששייכת לענף ספורט מסוים, מתבצעת בזמן $O(\log x)$ בממוצע כאשר x מציין את מספר ענפי הספורט שהשתתפו באולימפידה זו.
- בהינתן שם מדינה, הדפסת כל המשתתפים שיצגו את המדינה וזכו במדליה אחת או יותר באיזושהי אולימפיאדה, ממוינים לפי מספר המדליות שבהן הם זכו בזמן $O(g)$ בממוצע כאשר g מציין את מספר המשתתפים ברשימה שתודפס.
- בהינתן שם מדינה ואולימפידה, הדפסת כל ענפי הספורט שהוענקו בהן מדליות למדינה זו באולימפידה זו, ממוינים לפי מספר המדליות שהוענקו לכל ענף ספורט, בזמן $O(r)$ בממוצע כאשר r מציין את מספר ענפי הספורט ברשימה שתודפס.
- בהינתן ענף ספורט, הדפסת k המדינות שזכו במספר גדול ביותר של מדליות בענף ספורט זה בחישוב כולל של כל הזכיות בכל האולימפיאדות, בזמן $O(n+k\log k)$ בממוצע כאשר n מציין את מספר המדינות שהשתתפו בענף ספורט זה באיזושהי אולימפידה.

בנוסף לתאור מבנה הנתונים שהצעת, תאר/י באופן מילולי איך מתבצעות שלושת הפעולות האחרונות.

3. (15 נקודות)

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם P3(n,m) שמקבלת כפרמטר מספרים m ו- n. הפונקציה קוראת לפונקצית עזר בשם F(x) שמקבלת כפרמטר מספר x ומתוארת בהמשך.

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה P3(n,m) כתלות ב- n ו- m עבור המקרה שבו $n^2 \le m$ (במונחים של ה- O הקטן ביותר שאתה/את יודע/ת להשיג).

```
P3(n,m)
-------
y=0
for (i = 1; i ≤ n²; i++) {
  for (j = i; j ≤ m; j++) {
     y=y+F(i)
     if (i==1) { y=y·F(j²) }
  }
}
return y


F(x)
-------
if (x≤1) {return 1}
s=0
for (i = 1; i ≤ x; i++)
   {
     s=s+i
   }
return  s+F(x/2)+F(x/4)
```

4. (15 נקודות)

הוכח שלכל מספר שלם חיובי n שמתחלק ב- 6 (ללא שארית) וגדול מ-32 קיים עץ בינארי שמקיים את כל ארבעת התנאים הבאים:

1) מספר הצמתים בעץ הוא בדיוק n.

2) יש בעץ לפחות $\frac{n}{6}$ צמתים שהרמה שלהם
גדולה מ- $\frac{n}{6}+\log_2(\frac{2n}{3})-3$ וקטנה מ- $\frac{n}{6}+\log_2(\frac{2n}{3})+2$.

4) יש בעץ לפחות $\frac{n}{3}-1$ עלים.

.5 (15 נקודות)

הגדרה: גובה של עץ מוגדר כמספר הצמתים במסלול הארוך ביותר מהשורש לאיזשהו עלה. לדוגמה, גובה העץ בציור של שאלה 1 הוא 5.

שאלה זו מתייחסת להוספה של איברים לעץ **AVL** לפי אלגוריתם ההוספה שנלמד בכיתה.

האם קיים עץ **AVL** **T** שמקיים את כל התנאים הבאים:

1) גובה העץ הוא 4.

2) אם מוסיפים לעץ 3 צמתים גדולים ביותר, קורה גלגול מסוג **RR** בכל אחת מההוספות. במילים אחרות: אם מוסיפים צומת גדול מכל האיברים של העץ **T**, מתבצע גלגול מסוג **RR** במהלך ההוספה ומתקבל עץ שנסמנו T_1, ואם מוספים צומת גדול מכל האיברים של העץ T_1 מתבצע גלגול מסוג **RR** במהלך ההוספה, ומתקבל עץ שנסמנו T_2, ואם מוסיפים צומת גדול מכל האיברים של העץ T_2, מתבצע גלגול מסוג **RR** במהלך ההוספה.

3) אם מוסיפים לעץ **T** המקורי (ללא ההוספות של שלב 2) 3 צמתים קטנים ביותר, קורה גלגול מסוג **LL** בהוספת הצומת הראשון והשלישי.

במידה וקיים עץ כזה, צייר את העץ **T** שמקיים את כל שלושת התנאים הנ"ל. במידה ולא קיים עץ כזה נמק מדוע אין עץ כזה.

בהצלחה!