

**מבחן מועד ב' סמסטר אביב תשע"ז**  
**מבני נתונים**

- משך המבחן: שלוש וחצי שעות.
- יש לענות על כל השאלות.
- מותר השימוש בחומר עזר כלשהו פרט למחשבים (מחשבוני מותר).
- יש להקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת של התשובות.

בהצלחה!

**1. (20 נקודות)**

כתוב/כתבי פסאודו-קוד של תכנית בשם  $P_1$ , יעילה ככל האפשר, אשר מקבלת כפרמטרים עץ בינארי  $T$  ומספר  $k$ , ופועלת באופן הבא:

- אם המפתחות של כל הצמתים בעץ לא גדולים מהמספר  $k$  התוכנית מדפיסה את ההודעה:  $All\ keys\ are\ not\ greater\ than\ k$
- אחרת, התכנית מדפיסה את המפתח הקטן ביותר מבין המפתחות של כל הצמתים בעץ שגדולים מהמספר  $k$ .

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה שכתבת כתלות במספר הצמתים בעץ  $n$ .

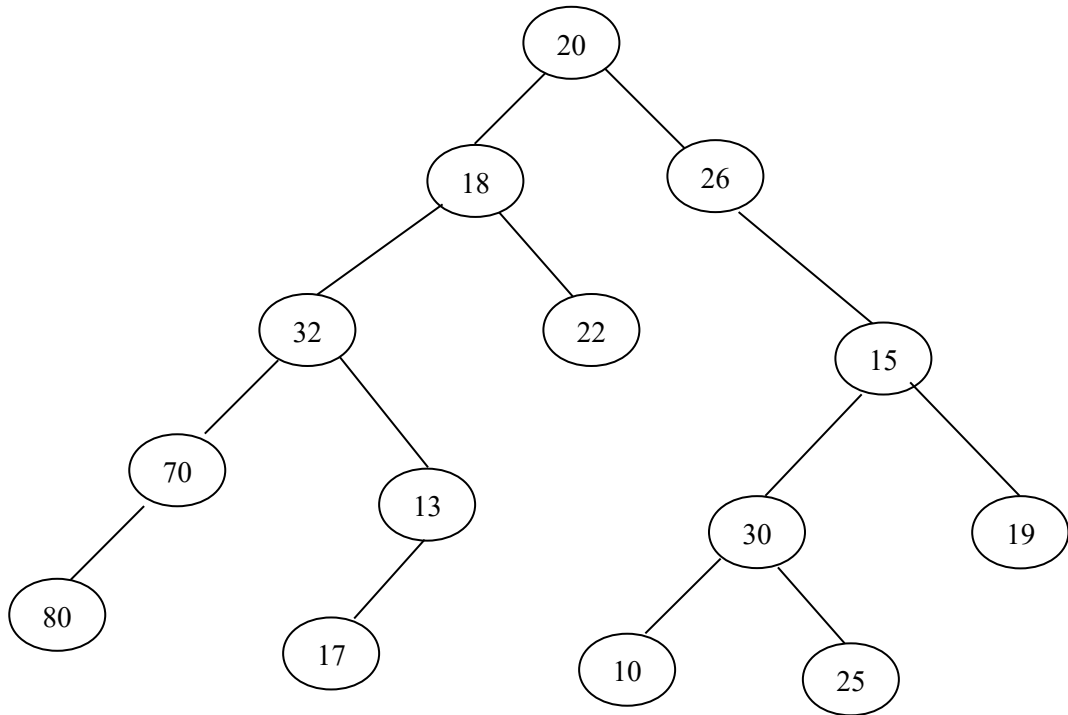
שימו לב: העץ  $T$  שהתכנית מקבלת כפרמטר, הוא עץ בינארי ולא עץ חיפוש בינארי, לכן אין סדר בין הצמתים בעץ.

**הנחות ודרישות:**

- אין להשתמש במבני עזר נוספים.
- מותר להשתמש במספר קבוע של משתנים (כמו למשל  $x, y, z$ ).
- מותר להשתמש בפונקציות עזר, אך יש לכתוב את הפסאודו-קוד של פונקציות העזר.
- כל צומת  $x$  בעץ מכיל את השדות הרגילים של עץ בינארי כפי שהוגדר בכיתה.

דוגמה:

יהי  $T$  עץ בינארי שמתואר בציור הבא :



לאחר הקריאה לפונקציה  $P1(T, 30)$  יתקבל הפלט:

32

הסבר לפלט: המפתחות של הצמתים בעץ שגדולים מ- 30 הם: 32, 70, 80. הקטן ביותר מבין המפתחות האלה הוא 32 ולכן הפלט הוא 32.

לאחר הקריאה לפונקציה  $P1(T, 80)$  יתקבל הפלט:

All keys are not greater than 80

הסבר לפלט: המפתחות של כל הצמתים בעץ לא גדולים מ- 80 ולכן התכנית מדפיסה את ההודעה הנ"ל.

## 2. (30 נקודות)

במערכת המחשוב של צה"ל שומרים נתונים על החילים המתגייסים.

לכל חייל שומרים: תעודת זהות (משמש לזיהוי החייל), התאריך שבו התגייס, ההכשרות אותן עבר במהלך שירותו הצבאי והתפקידים הצבאיים אותם מילא במהלך שירותו הצבאי.

עבור כל הכשרה שומרים: מאפיני ההכשרה (משמשים לזיהוי ההכשרה) שכוללים: שם ההכשרה, התאריכים שבהם התבצעה ההכשרה ושם הבסיס הצבאי שבו בוצעה ההכשרה. נוסף לכך לכל הכשרה שומרים נתונים על החיילים שביצעו את ההכשרה, שכוללים את מספר החיילים שהתחילו את ההכשרה ומספר החיילים שסימו בהצלחה את ההכשרה.

לכל תפקיד צבאי שומרים: שם התפקיד (משמש לזיהוי התפקיד), שם ההכשרה הדרושה למילוי התפקיד, וכן נתונים על החיילים שמילאו תפקיד זה.

בשאלה זו יש להניח שלכל תפקיד יש רק שם הכשרה אחת שדרושה למילויו, ולכל שם הכשרה יש רק תפקיד אחד שאליו היא מכשירה.

פרט להנחה הנ"ל, אסור להניח שמשווא אחר קבוע, למשל אסור להניח שמספר ההכשרות הוא קבוע, אסור להניח שמספר התפקידים הוא קבוע, אסור להניח שעבור תפקיד מסוים מספר ההכשרות שבוצעו היה קבוע (מה שקבוע הוא השמות של ההכשרות האלה, שלכולן יש אותם שמות, אבל כל אחת מהן שונה מהשניה כי התבצעה בתאריכים אחרים או בבסיסים אחרים). וכן הלאה...

הערה: האופן בו נשמרים הנתונים הנ"ל אינו מפורט ויהיה עליך לציין אותו כחלק מפתרון השאלה.

המשך בעמוד הבא...

הצע/הציעי מבנה נתונים עבור המערכת הנ"ל ששומר את הנתונים הנ"ל ותומך בפעולות הבאות:

- הוספת/הוצאת הנתון שחייל מסוים ביצע תפקיד מסוים בתקופה מסוימת מתבצעת בזמן  $O(z * (\log y + \log x))$  בממוצע כאשר  $y$  מציין את מספר השנים שעבורן שומרים נתונים במערכת,  $x$  מציין את מספר התפקידים שעבורם שומרים נתונים במערכת ו-  $z$  מציין את מספר השנים שנמצאות בתקופה המסוימת בה ביצע החייל המסוים את התפקיד המסוים.
- הוספת/הוצאת הנתון שחייל מסוים התחיל הכשרה מסוימת וסיים אותה בהצלחה או לא מתבצעת בזמן  $O(1)$  בממוצע. בסעיף זה ההוספה מוסיפה את כל הנתונים, דהינו גם את התאריך בו החל את ההכשרה וגם את הנתון אם סיים בהצלחה או לא. בסעיף זה ההוצאה מוציאה את כל הנתונים, דהינו מוציאים את הנתון שהחיל התחיל את ההכשרה ומוציאים גם את הנתון שהחיל סיים את ההכשרה בהצלחה או לא.
- בהינתן תעודת זהות של חייל, הדפסת כל ההכשרות שהחיל עבר וסיים בהצלחה ללא חשיבות לסדר ההכשרות, בזמן  $O(h)$  בממוצע, כאשר  $h$  מציין את מספר ההכשרות ברשימה שתודפס.
- בהינתן שנה ותפקיד, הדפסת כל ההכשרות שנדרשות למילוי התפקיד והסתימו בשנה זו (התאריך בו החלו ההכשרות אינו חשוב), ממוינות לפי אחוזי ההצלחה של ההכשרות, בזמן  $O(c \log c)$  בממוצע, כאשר  $c$  מציין את מספר ההכשרות ברשימה שתודפס. עבור כל הכשרה יודפסו מאפייני ההכשרה שכוללים את שם ההכשרה, תאריכי ההכשרה, והבסיס הצבאי בו בוצעה ההכשרה. בנוסף לכך, עבור כל הכשרה יודפסו אחוזי ההצלחה של הכשרה שמחושבים על ידי הנוסחה הבאה: מספר החילים המסיימים את ההכשרה לחלק במספר החילים שהחלו את ההכשרה כפול 100.
- בהינתן שנה הדפסת כל התפקידים שבצעו חילים בשנה זו ממוינים לפי סך כל החילים שבצעו תפקידים אלו בשנה זו, בזמן  $O(\log y + t)$  במקרה הגרוע, כאשר  $y$  מציין את מספר השנים שעבורן שומרים נתונים במערכת ו-  $t$  מציין את מספר התפקידים ברשימה שתודפס. יש להניח שחייל מבצע תפקיד בשנה מסוימת, אם התקופה שבה מילא החייל את התפקיד מכילה שנה זו. לדוגמה, אם חייל מסוים מלא תפקיד מסוים החל מתאריך 1.1.2015 ועד לתאריך 1.1.2017 (כולל) אז השנים שבהן מילא החיל את התפקיד הן 2015, 2016, 2017.

בנוסף לתאור מבנה הנתונים שהצעת, תאר/י באופן מילולי איך מתבצעות שלושת הפעולות האחרונות.

### .3 (20 נקודות)

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם  $P3(n,m)$  שמקבלת כפרמטר מספרים  $n$  ו- $m$ . הפונקציה קוראת לפונקציה עזר בשם  $F(x)$  שמקבלת כפרמטר מספר  $x$  ומתוארת בהמשך.

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה  $P3(n,m)$  כתלות ב- $n$  ו- $m$  (במונחים של ה- $O$  הקטן ביותר שאתה/את יודעת להשיג).

$P3(n,m)$

-----

$y=0$

```
for (i = 1; i ≤ n2 ; i++) {
    for (j = 1; j ≤ n · m ; j++) {
        y=y+F(j2)
    }
    y=y+F( m3 · i )
}
return y
```

$F(x)$

-----

```
for (i = 1; i ≤ 3x ; i=i · 3 )
{
    s=s+i
}
return s
```

#### 4. (15 נקודות)

נזכיר שתת העץ הימני/השמאלי של צומת  $x$  מוגדר כתת העץ ששורשו הוא הבן הימני/השמאלי של הצומת  $x$ .

הוכח שלכל מספר שלם חיובי  $n$  שמתחלק ב-8 (ללא שארית) וגדול מ-32 קיים עץ בינארי שמקיים את כל ארבעת התנאים הבאים:

(1) מספר הצמתים בעץ הוא בדיוק  $n$ .

(2) בתת העץ הימני של השורש יש לפחות  $\frac{n}{4} - 2$  צמתים ובתת העץ

השמאלי של השורש יש לפחות  $\frac{n}{4} - 2$  צמתים.

(3) יש בעץ לפחות  $\frac{n}{16}$  צמתים שהרמה שלהם

גדולה מ-3  $\frac{n}{4} + \log_2\left(\frac{n}{4}\right) - 3$

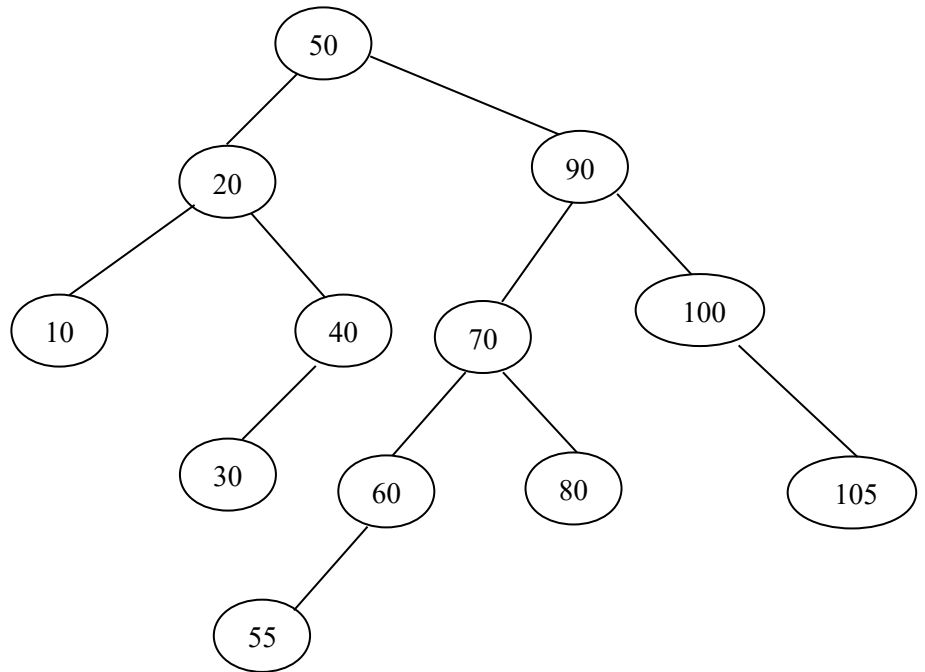
וקטנה מ-3  $\frac{n}{4} + \log_2\left(\frac{n}{4}\right) + 3$

(4) יש בעץ לפחות  $\frac{7n}{16} - 2$  עלים.

5. (15 נקודות)

שאלה זו מתייחסת להוספה/הוצאה של איברים בעץ AVL לפי אלגוריתמי ההוספה/הוצאה שנלמדו בכיתה.

יהי T עץ AVL שמתואר בציור הבא :



א) ציר את העץ שיתקבל לאחר הוצאת הצמתים 20 ו-40 מהעץ המקורי T. (הנח שקודם מוציאים את 20 ואחר כך מוציאים את 40). מספיק לצייר את העץ הסופי, אין צורך לצייר את שלבי הביניים.

ב) מהו המספר הקטן ביותר של צמתים שיש להוסיף לעץ T המקורי כדי לגרום לגלגול מסוג RL סביב צומת 90. בנוסף לציין מספר הצמתים הנדרש, ציין גם את מספרי המפתחות של הצמתים שצריך להוסיף לעץ כדי לגרום לגלגול הנדרש. בסעיף זה אין צורך לצייר את העץ הסופי שמתקבל לאחר ההוספות.

**בהצלחה!**