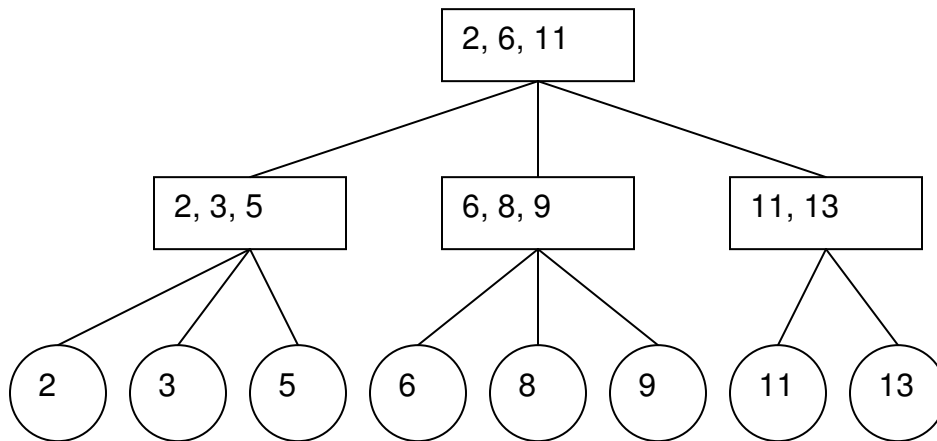


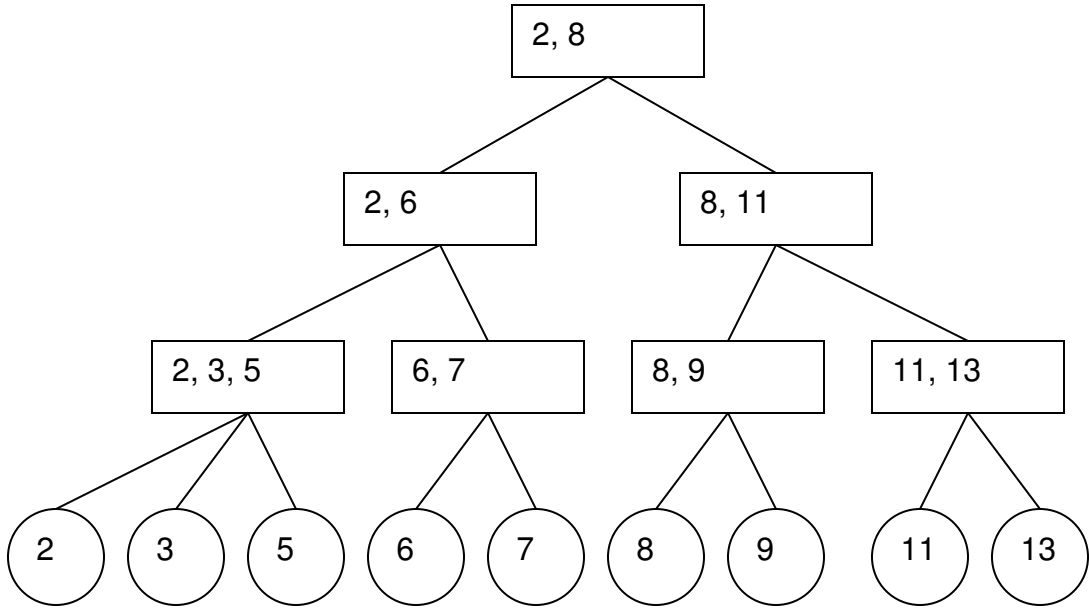
עצי 2-3 ועצי B

משפחה של עצים מאוזנים.
המידע נשמר אך ורק בעלים. הקודקודים הפנימיים הם קודקודי דמה ותפקידם לאפשר "התמצאות מהירה".
לכל קודקוד פנימי יש 2 או 3 בנים (בעץ B לכל קודקוד פנימי יש בין t ל $2t$ בנים; לשורש יש בין 2 ל $2t$ בנים).
"עץ 2-3 הוא "בן חורג" במשפחת עצי ה B היות והדרגה המקסימלית שלו היא אי-זוגית).
כל העלים באותה רמה.
הרעיון המרכזי בהוספה: אם לקודקוד יש יותר מדי בנים, נפצל אותו.
הרעיון המרכזי בהוצאה: אם לקודקוד יש פחות מדי בנים, "נלווה" מאחיו או שנבטל אותו ונצרף את בניו לאחיו.

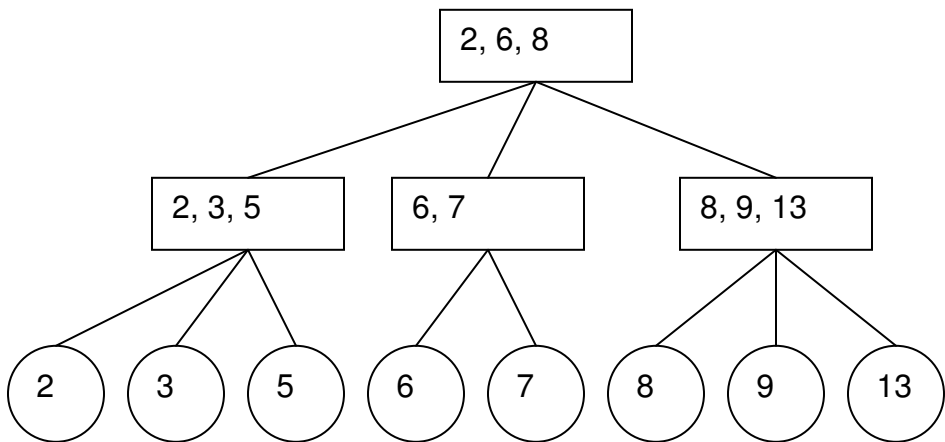
תרגיל
נתון עץ 2-3:



צייר את העץ לאחר הוספת האיבר 7.



צייר את העץ (החדש) לאחר הוצאת האיבר 11.



שאלה: האם קיים עץ B מדרגה $2t = 8$ מעומק 5 כך שלשורש יש 3 בנים וע"י הוצאה של איבר אחד עומק העץ יקטן ל 4?
תשובה: לא. בכדי שעומק העץ יקטן חייב להיווצר מצב בו לשורש יש בן יחיד.

שאלה: מה מספר האיברים המינימלי שצריך להוציא מעץ B מדרגה $2t$ (כללי) כדי שעומק העץ יקטן ב 2?
תשובה: $2t - 1$.

הסבר: מספיק להוציא איבר אחד בכדי שעומק העץ יקטן ב 1. זה קורה כאשר לשורש יש 2 בנים, לאחד מהם יש $t - 1$ בנים (תוך כדי תהליך ההוצאה) ולשני t (אחרת ניתן היה "להלוות") כך שלשורש החדש חייבים להיות $2t - 1$ בנים. עכשיו בשביל שעומק העץ יקטן שוב חייבים להשאיר את השורש עם בן יחיד כלומר להוציא עוד לפחות $2t - 2$ איברים נוספים. סכ"ה נצטרך להוציא לפחות $2t - 1$ איברים.

שאלה: מה מספר האיברים המינימלי שצריך להוסיף לעץ B מדרגה $2t$ (כללי) כדי שעומק העץ יגדל ב 2?

תשובה: $2t^2 - t + 1$.

הסבר: מספיק להוסיף איבר אחד בכדי שעומק העץ יגדל ב 1. זה קורה כאשר לשורש יש $2t + 1$ בנים (תוך כדי תהליך ההכנסה) לכן הוא מתפצל לשני קודקודים, קודקוד x עם t בנים וקודקוד y עם $t + 1$ בנים ומוסיפים שורש חדש z – בשלב זה עם 2 בנים x ו y . בכדי שעומק העץ יגדל שוב חייבים להגיע למצב בו ל z יש $2t + 1$ בנים. כיצד נעשה זאת? ע"י הוספת t בנים לקודקוד y נוכל לפצלו לשני קודקודים - קודקוד x' עם t בנים וקודקוד y' עם $t + 1$ בנים – ובכך להגדיל את מספר הבנים של z ל 3. אם נחזור על התהליך הזה $2t - 1$ פעמים נגיע למצב הדרוש בו לשורש z יש $2t + 1$ בנים לכן הוא יפוצל ועומק העץ יגדל שוב. סכ"ה צריך להוסיף איבר אחד לפיצול השורש הראשון ועוד $t \cdot (2t - 1)$ איברים לפיצול של השורש החדש z .

שימו לב: 2 החישובים האחרונים (הקטנת/הגדלת עומק עץ B ב 2) מתיחסים לחסמים תחתונים כלומר לא ניתן לגרום להקטנת/הגדלת עומק של עץ B מדרגה $2t$ באמצעות הוצאת/הוספת פחות ממספר האיברים שחישבנו אבל בפרוש ייתכן מצב בו גם המספר הזה לא מספיק.