30.5.2016

מבני נתונים
פתרון תרגיל מס׳ 10

1. שאלה זו הופיע במבחן מועד א 2015

הוכח שלכל מספר שלם חיובי n שמתחלק ב- 4 (ללא שארית) וגדול מ- 32 קיים עץ בינארי שמקיים את כל חמשת התנאים הבאים:

1) מספר הצמתים בעץ הוא בדיוק n.

2) יש בעץ לפחות $\frac{n}{16}$ צמתים שהרמה שלהם גדולה מ- $\log_2(\frac{n}{4})-2$ וקטנה מ- $\log_2(\frac{n}{4})+1$.

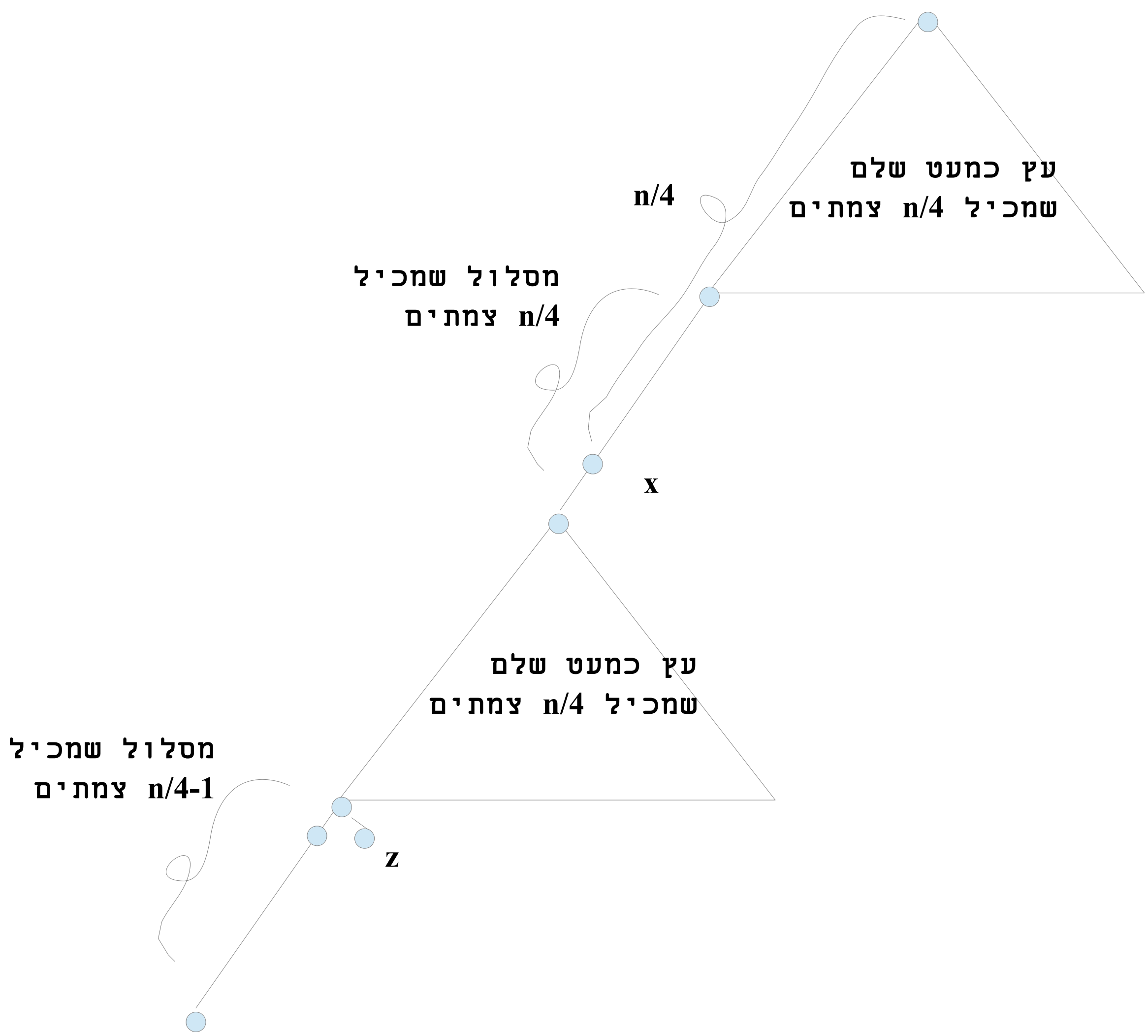
3) יש בעץ לפחות $\frac{n}{16}$ צמתים שהרמה שלהם גדולה מ- $\frac{n}{4}+2\cdot\log_2(\frac{n}{4})-3$ וקטנה מ- $\frac{n}{4}+2\cdot\log_2(\frac{n}{4})+3$

4) יש בעץ לפחות $\frac{n}{4}$ צמתים שהגובה שלהם גדול מ- $\frac{n}{4}+2\cdot\log_2(\frac{n}{4})-4$.

5) יש בעץ לפחות $\frac{n}{8}$ עלים.

פתרון

נסתכל על העץ שבציור הבא ונראה שהוא עונה על כל הדרישות שבשאלה.



העץ מקיים את דרישה 1 כי:

מספר הצמתים בעץ $= n/4 + n/4 + n/4 + n/4 - 1 + 1 = n$

העץ העליון, המסלול העליון, העץ התחתון, המסלול התחתון, העלה הנוסף

לפי טענה 10 בעץ העליון יש לפחות $\frac{n/4+1}{4}>n/16$ צמתים שהרמה שלהם גדולה או שווה ל- $\log_2((n/4)+1)-1$ וקטנה או שווה ל- $\log_2(n/4)$.
ולכן בעץ העליון יש לפחות $n/16$ צמתים שהרמה שלהם גדולה מ- $\log_2(n/4)-2$ וקטנה מ- $\log_2(n/4)+1$, ולכן דרישה 2 מתקיימת.

באופן דומה לפי טענה 10 בעץ התחתון יש לפחות $n/16$ צמתים שהמרחק שלהם מהשורש של העץ התחתון גדול מ- $\log_2(n/4)-2$ וקטן מ- $\log_2(n/4)+1$. נסמן ב- r את הרמה של הצמתים האלה. כדי לקבל את הרמה r של הצמתים האלה צריך להוסיף למרחק שלהם מהשורש של העץ התחתון את אורך המסלול העליון שהוא $n/4$ ועוד גובה העץ העליון שנסמנו h.

לכן נקבל:

$$(1)\quad n/4+h+\log_2 n/4-2<r<n/4+h+\log_2(n/4)+1$$

על סמך טענה 6 על העץ העליון נקבל:

$$(2)\quad \log_2(n/4+1)\le h\le 1+\log_2(n/4)$$

מ- (1) ו- (2) נקבל:

$$(3)\quad n/4+2\log_2 n/4-2<r<n/4+2\log_2(n/4)+2$$

מ- (3) נקבל שיש לפחות $n/16$ צמתים שהרמה שלהם r מקיימת:

$$(4)\quad n/4+2\log_2 n/4-3<r<n/4+2\log_2(n/4)+3$$

ולכן דרישה 3 מתקיימת.

נסמן ב- y את גובה העץ שבציור. שהוא למעשה אורך המסלול שמתחיל בשורש והולך שמאלה עד הסוף. נקבל ש-

$$(5)\quad y = h+\quad n/4+\quad h+\quad n/4-1 = n/2+2h-1$$

גובה העץ העליון | המסלול העליון | גובה העץ התחתון | המסלול התחתון

נסמן ב- x את הצומת ה- $n/4$ במסלול שמתחיל מהשורש והולך שמאלה. הצומת x מצויר בציור. נסמן ב- $h(x)$ את גובה הצומת x.

$$(6)\quad h(x)=y-n/4+1$$

מ- (5) ו- (6) נקבל:

$$(7)\quad h(x)=n/2+2h-1-n/4+1=n/4+2h$$

מ- (2) ו- (7) נקבל:

$$(8)\quad h(x)=n/4+2h\geq n/4+2\cdot(\log_2 n/4)>n/4+2\cdot(\log_2 n/4)-4$$

ולכן הגובה של צומת x ושל כל n/4 הצמתים שבמסלול שמחבר את x לשורש העץ שבציור גדול מ- $n/4+2\cdot(\log_2 n/4)-4$ ודרישה 4 מתקימת.

נסמן את q את מספר העלים בעץ. נסמן ב- q_1 את מספר העלים בעץ העליון ונסמן ב- q_2 את מספר העלים בעץ התחתון. נקבל:

$$(9)\quad q = \underbrace{q_1}_{\text{העלים של העץ העליון}} + \underbrace{q_2}_{\text{העלים של העץ העליון}} + \underbrace{1}_{\text{העלה שבסוף המסלול התחתון}} + \underbrace{1}_{\text{העלה z שמתואר בציור}}$$

על סמך טענה 8 ובגלל שאיבר השמאלי ביותר ברמה האחרונה בעץ העליון והתחתון אינו עלה נקבל:

$$(10)\quad q_1\geq\frac{n/4+1}{4}-1>n/16-1$$

$$(11)\quad q_2\geq\frac{n/4+1}{4}-1>n/16-1$$

מ- (9) (10 ו- (11) נקבל:

$$(12)\quad q=q_1+q_2+1+1>n/16-1+n/16-1+1+1=n/8$$

ולכן קיבלנו שמספר העלים בעץ שבציור הוא לפחות n/8 ודרישה 5 מתקימת.

2. שאלה זו הופיע במבחן מועד ב 2015

הוכח שלכל מספר שלם חיובי n שמתחלק ב- 5 (ללא שארית) וגדול מ- 32 קיים עץ בינארי שמקיים את כל חמשת התנאים הבאים:

1) מספר הצמתים בעץ הוא בדיוק n.

2) יש בעץ לפחות $\frac{n}{20}$ צמתים שהרמה שלהם גדולה מ- $\log_2(\frac{n}{5})-2$ וקטנה מ- $\log_2(\frac{n}{5})+1$.

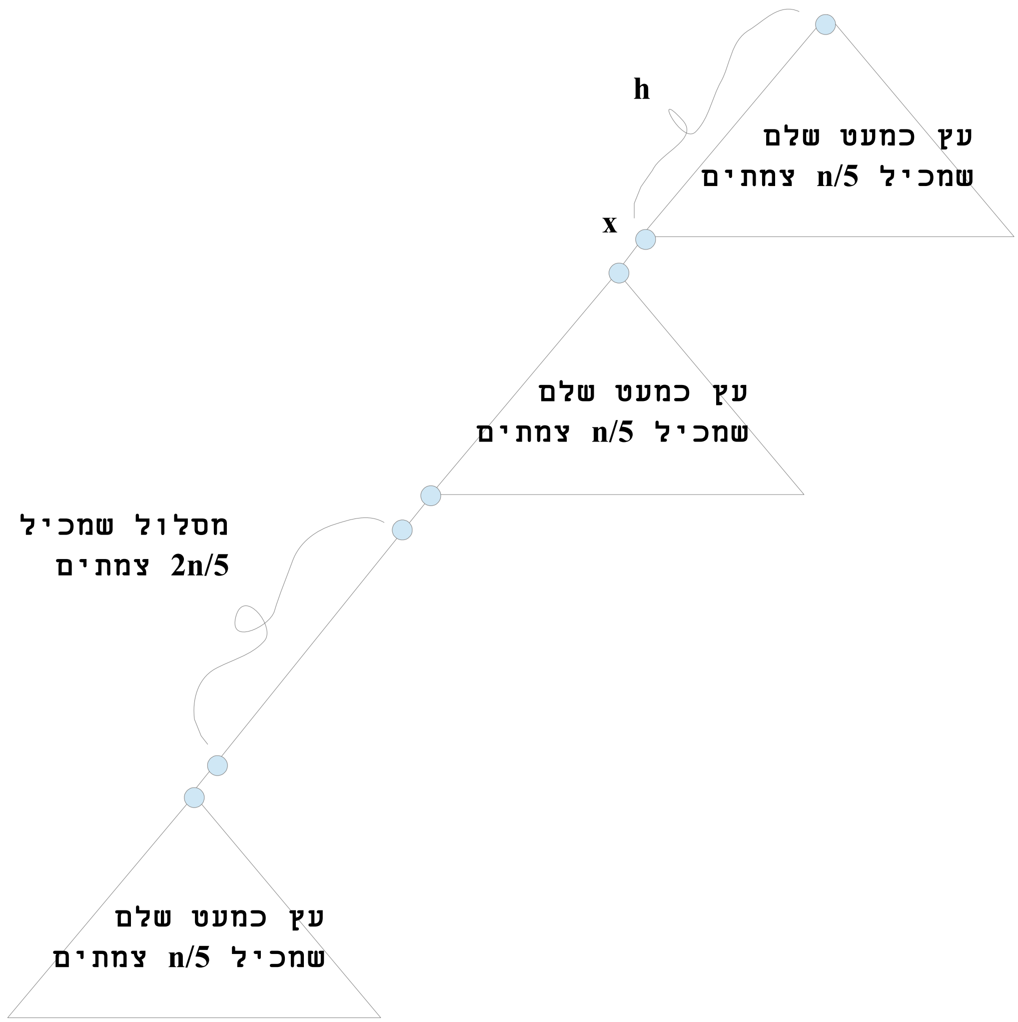
3) יש בעץ לפחות $\frac{n}{20}$ צמתים שהרמה שלהם גדולה מ- $\frac{2n}{5}+3\cdot\log_2(\frac{n}{5})-4$ וקטנה מ- $\frac{2n}{5}+3\cdot\log_2(\frac{n}{5})+4$

4) יש בעץ לפחות $\log_2\frac{n}{5}$ צמתים שהגובה שלהם גדול מ- $\frac{2n}{5}+2\cdot\log_2(\frac{n}{5})$.

5) יש בעץ לפחות $\frac{n}{9}-2$ עלים.

פתרון

נסתכל על העץ שבציור הבא ונראה שהוא עונה על כל הדרישות שבשאלה.



העץ מקיים את דרישה 1 כי:

מספר הצמתים בעץ $= n/5 + n/5 + n/5 + 2n/5 = n$

המסלול, העץ התחתון, העץ העליון, העץ העליון

לפי טענה 10 בעץ העליון יש לפחות $\frac{n/5+1}{4}>n/20$ צמתים שהרמה שלהם גדולה או שווה ל- $\log_2((n/5)+1)-1$ וקטנה או שווה ל- $\log_2(n/5)$.
ולכן בעץ העליון יש לפחות $n/20$ צמתים שהרמה שלהם גדולה מ- $\log_2(n/5)-2$ וקטנה מ- $\log_2(n/5)+1$, ולכן דרישה 2 מתקיימת.

באופן דומה לפי טענה 10 בעץ התחתון יש לפחות $n/20$ צמתים שהמרחק שלהם מהשורש של העץ התחתון גדול מ- $\log_2(n/5)-2$ וקטן מ- $\log_2(n/5)+1$. נסמן ב- r את הרמה של הצמתים האלה. כדי לקבל את הרמה r של הצמתים האלה צריך להוסיף למרחק שלהם מהשורש של העץ התחתון את אורך המסלול שהוא שהוא $2n/5$ ועוד גובה העץ האמצעי שנסמנו h וגובה העץ העליון שגם הוא שווה ל- h.

לכן נקבל:

$$(1)\quad 2n/5+2h+\log_2 n/5-2<r<2n/5+2h+\log_2(n/5)+1$$

על סמך טענה 6 על העץ העליון נקבל:

$$(2)\quad \log_2(n/5+1)\leq h\leq 1+\log_2(n/5)$$

מ- (1) ו- (2) נקבל:

$$(3)\quad 2n/5+2\cdot(\log_2(n/5+1))+\log_2 n/5-2<r<2n/5+2\cdot(1+\log_2(n/5))+\log_2(n/5)+1$$

מ- (3) נקבל שיש לפחות $n/20$ צמתים שהרמה שלהם r מקיימת:

$$(4)\quad 2n/5+3\cdot\log_2 n/5-2<r<2n/5+3\cdot\log_2(n/5)+3$$

ולכן דרישה 3 מתקיימת.

נסמן ב- y את גובה העץ שבציור. שהוא למעשה אורך המסלול שמתחיל בשורש והולך שמאלה עד הסוף. נקבל ש-

$$(5)\quad y = \underbrace{h}_{\text{גובה העץ העליון}}+\underbrace{h}_{\text{המסלול העליון}}+\underbrace{2n/5}_{\text{גובה העץ התחתון}}+\underbrace{h}_{\text{המסלול התחתון}} = 2n/5+3h$$

נסמן ב- x את הצומת ה- h במסלול שמתחיל מהשורש והולך שמאלה. הצומת x מצויר בציור. נסמן ב- $h(x)$ את גובה הצומת x.

$$(6)\quad h(x)=y-h+1$$

מ- (5) ו- (6) נקבל:

$$(7)\quad h(x)=2n/5+3h-h+1=2n/5+2h+1$$

מ- (2) ו- (7) נקבל:

(8) $h(x)=2n/5+2h+1\geq 2n/5+2\cdot\log_2(n/5+1)+1>2n/5+2\cdot(\log_2 n/5)$

ולכן הגובה של צומת x ושל כל h הצמתים שבמסלול שמחבר את x לשורש העץ שבציור גדול מ- $2n/5+2\cdot(\log_2 n/5)$. מאחר ולפי (2) h גדול מ- $\log_2(n/5)$, יש לפחות $\log_2(n/5)$ צמתים שהגובה שלהם גדול מ- $2n/5+2\cdot(\log_2 n/5)$ ודרישה 4 מתקיימת.

נסמן את q את מספר העלים בעץ. נסמן ב- q_1 את מספר העלים בעץ העליון ונסמן ב- q_2 את מספר העלים בעץ האמצעי נסמן ב- q_3 את מספר העלים בעץ התחתון. נקבל:

(9) $$q = \underbrace{q_1}_{\text{העלים של העץ העליון}} + \underbrace{q_2}_{\text{העלים של העץ האמצעי}} + \underbrace{q_3}_{\text{העלים של העץ התחתון}}$$

על סמך טענה 8 ובגלל שאיבר השמאלי ביותר ברמה האחרונה בעץ העליון האמצעי והתחתון אינו עלה נקבל:

(10) $$q_1\geq\frac{n/5+1}{4}-1>n/20-1$$

(11) $$q_2\geq\frac{n/5+1}{4}-1>n/20-1$$

(12) $$q_3\geq\frac{n/5+1}{4}-1>n/20-1$$

מ- (9)-(12) נקבל:

(13) $$q=q_1+q_2+q_3>n/20-1+n/20-1+n/20-1=3n/20-3$$

נבדוק עבור איזה ערכים של n מתקיים:

(14) $3n/20-3>n/9-2$

ששקול ל-

(15) $3n/20-n/9>1$

ששקול ל-

(16) $27n-20n>180$

ששקול ל-

(17) $n>180/7$

מאחר ובדרישות השאלה $n>32$ ו- $180/7$ שווה בערך ל- 25.7 אנחנו יודעים שאי שוויון (17) מתקיים ולכן מתקיים גם אי שוויון (14) ולכן $q>n/9-2$ ודרישה 5 מתקיימת.

3. שאלה זו הופיע במבחן מועד ג 2015

הוכח שלכל מספר שלם חיובי n שמתחלק ב- 12 (ללא שארית) וגדול מ- 32 קיים עץ בינארי שמקיים את כל שלושת התנאים הבאים:

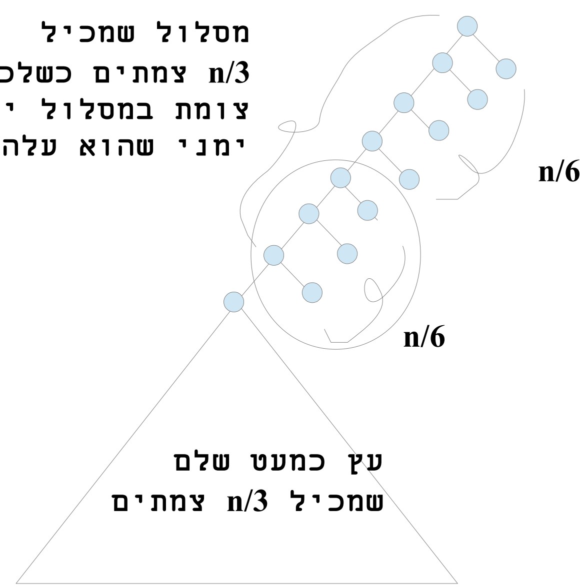
1) מספר הצמתים בעץ הוא בדיוק n.

2) יש בעץ לפחות $\frac{2n}{3}$ צמתים שהרמה שלהם
גדולה מ- $\log_2\left(\frac{n}{3}\right)$ וקטנה מ- $4+\frac{n}{3}+\log_2\left(\frac{n}{3}\right)$

3) יש בעץ לפחות $\frac{5n}{12}-1$ עלים.

<u>פתרון</u>

נסתכל על העץ שבציור הבא ונראה שהוא עונה על כל הדרישות שבשאלה.



העץ מקיים את דרישה 1 כי:

מספר הצמתים בעץ = n/3 +2n/3 = n

העץ העליון

המסלול כולל הבן הימני של כל צומת

נסמן ב- h את גובה העץ הכמעט שלם. נסמן ב- r_1 את הרמה של צומת כלשהו בעץ הכמעט שלם. נקבל ש-

$$(1)\quad n/3<r_1\le n/3+h$$

לפי טענה 6:

$$(2)\quad \log_2(n/3+1)\le h\le 1+\log_2(n/3)$$

מ- (1) ו- (2) נקבל:

$$(3)\quad n/3<r_1\le n/3+h\le n/3+1+\log_2(n/3)$$

מ- (3) נקבל:

$$(4)\quad \log_2 n/3<r_1<n/3+4+\log_2(n/3)$$

ולכן כל $n/3$ הצמתים בעץ הכמעט שלם מקיימים שהרמה שלהם גדולה מ- $\log_2 n/3$ וקטנה מ- $n/3+4+\log_2(n/3)$.

נסמן ב- r_2 את הרמה של צומת כלשהו שנמצא בעיגול שמתואר בציור, במילים אחרות, הצומת נמצא במסלול של $n/6$ הצמתים שמעל השורש של העץ הכמעט שלם, או שהוא בן ימני של צומת כזה.

נקבל ש-

$$(5)\quad n/6<r_2\le n/3+1$$

מאחר ו- $n>32$ נקבל ש-

$$(6)\quad \log_2 n/3<n/6$$

כדי לבדוק ש- (6) נכון עבור $n>32$, נבדוק שאי השוויון מתקיים עבור $n=32$, ומאחר ופונקציה לינארית עולה יותר מהר מפונקציה לוגריתמית, מובטח לנו שאי השוויון יתקיים גם עבור $n>32$.

מ- (5) ו- (6) נקבל:

$$(7)\quad \log_2 n/3<r_2<n/3+4+\log_2(n/3)$$

ולכן כל $n/3$ הצמתים שבעיגול שמסומן בציור מקיימים שהרמה שלהם גדולה מ- $\log_2 n/3$ וקטנה מ- $n/3+4+\log_2(n/3)$.

בסך הכל $2n/3$ הצמתים שנמצאים בעץ הכמעט שלם או בעיגול שמסומן בציור מקיימים שהרמה שלהם גדולה מ- $\log_2 n/3$ וקטנה מ- $n/3+4+\log_2(n/3)$ ודרישה 2 מתקיימת.

נסמן ב- q את מספר העלים בעץ ונסמן ב- q_1 את מספר העלים שנמצאים בעץ הכמעט שלם.
נקבל ש-

(8) $q=q_1+n/3$

לפי טענה 8:

(9) $q_1 \geq \frac{n/3+1}{4} > n/12$

מ- (8) ו- (9) נקבל:

(10) $q=q_1+n/3>n/12+n/3=5n/12>5n/12-1$

ולכן $q>5n/12-1$ ודרישה 5 מתקיימת.