ביה״ס למדעי המחשב ומתמטיקה המכללה האקדמית נתניה
סמסטר ב׳ תשע״ו

25.4.2016

מבני נתונים
פתרון תרגיל מס׳ 1

1. תהי $f(n) = 5n^3n^{1/4}(\log_2 n)^3 + 20n^{7/2}\log_2 n$

ותהי $g(n) = 2n^3n^{3/5}$

הוכח לפי הגדרה 2 (דהינו ההגדרה עם הקבועים c ו- n_0) ש- $f(n)=O(g(n))$

פתרון

מאחר ו-

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3n^{1/4}(\log_2 n)^3+20n^{7/2}\log_2 n}{2n^3n^{3/5}}=0$$

לכן אפשר לבחור כל קבוע $c>0$ למשל נבחר $c=1$. נחפש N_0 כך שעבור כל $n>N_0$ יתקיים:

$$f(n)\le c\cdot g(n)$$

עבור $c=1$ ועבור הפונקציות $f(n)$ ו- $g(n)$ הנ"ל אי השוויון הנ"ל שקול ל-

$$(1)\quad 5n^3n^{1/4}(\log_2 n)^3+20n^{7/2}\log_2 n\le 2n^3n^{3/5}$$

אי השויון (1) נובע משני אי השויונות הבאים:

$$(2)\quad 20n^{7/2}\log_2 n\le n^3n^{3/5}$$

$$(3)\quad 5n^3n^{1/4}(\log_2 n)^3\le n^3n^{3/5}$$

בשלב ראשון נראה שקיים N'_0 כך שעבור כל $n>N'_0$ מתקיים אי שוויון (2).

בשלב שני נראה שקיים N''_0 כך שעבור כל $n>N''_0$ מתקיים אי שוויון (3).

נבחר N_0 ששווה למקסימום בין N'_0 ו- N''_0 ונקבל שעבור כל $n>N_0$ מתקיימים גם אי שוויון (2) וגם אי שוויון (3) ולכן מתקיים אי שוויון (1) והוכחנו מה שרצינו.

נתאר עכשיו את השלב הראשון, נתחיל עם אי שוויון (2):

$$(2)\quad 20n^{7/2}\log_2 n \le n^3 n^{3/5}$$

ששקול ל-

$$20\log_2 n \le n^{3+0.6-3.5}$$

ששקול ל-

$$20\log_2 n \le n^{0.1}$$

ששקול ל-

$$20\log_2 n \le n^{\frac{1}{10}}$$

ששקול ל-

$$(4)\quad 20^{10}(\log_2 n)^{10} \le n$$

נציב:

$$x=\log_2 n$$

ששקול ל-

$$n=2^x$$

נציב את שני השוויונות האחרונים באי שוויון (4) ונקבל:

$$(5)\quad 20^{10}x^{10} \le 2^x$$

ידוע שלכל x מתקיים:

$$(6)\quad x \le 2^x$$

ולכן נקבל שלכל x מתקיים:

$$(7)\quad 2^x=2^{(\frac{x}{11}+\frac{x}{11}+...+\frac{x}{11})} \ge \frac{x}{11}\cdot\frac{x}{11}\cdots\frac{x}{11}=\frac{x^{11}}{11^{11}}$$

ולכן אם יתקיים אי השויון הבא:

$$(8)\quad 20^{10}x^{10} \le \frac{x^{11}}{11^{11}}$$

אזי מ- (8) ו- (7) נובע שמתקיים (6).

לכן נראה בהמשך ש- (8) מתקיים לכל $n>N'_0$.

אי השויון (8) שקול ל-

$$(9)\quad 20^{10} \le \frac{x}{11^{11}}$$

ששקול ל-

$$(10)\quad 20^{10} \cdot 11^{11} \le x$$

נציב חזרה $x = \log_2 n$ ונקבל:

$$(12)\quad 20^{10} \cdot 11^{11} \le \log_2 n$$

ששקול ל-

$$(13)\quad 2^{20^{10} \cdot 11^{11}} \le n$$

לכן נבחר:

$$N'_0 = 2^{20^{10} \cdot 11^{11}}$$

וסימנו את השלב הראשון.

נתאר עכשיו את השלב השני, נתחיל עם אי שוויון (3):

$$(3)\quad 5n^3 n^{1/4} (\log_2 n)^3 \le n^3 n^{3/5}$$

ששקול ל-

$$(14)\quad 5(\log_2 n)^3 \le n^{7/20}$$

ששקול ל-

$$(15)\quad 5^{20} (\log_2 n)^{60} \le n^7$$

נסתכל על אי השוויון הבא:

$$(16)\quad 5^{20} (\log_2 n)^{60} \le n^6$$

עבור n גדול מ- 1 אם מתקיים אי שוויון 16 אז ברור שמתקיים אי שוויון (15) ולכן מספיק להראות שמתקיים אי שוויון 16.

אי שוויון (16) שקול ל-

$$(17)\quad 5^{20/6} (\log_2 n)^{10} \le n$$

כמו במקרה הקודם נציב $x = \log_2 n$ ונקבל שאי שוויון (17) שקול לאי השויון הבא:

$$(18)\quad 5^{20/6}x^{10} \le 2^{x}$$

כמו במקרה הקודם נקבל שידוע ש-

$$(19)\quad 2^{x} = 2^{\left(\frac{x}{11}+\frac{x}{11}+...+\frac{x}{11}\right)} \ge \frac{x}{11}\cdot\frac{x}{11}\cdots\frac{x}{11} = \frac{x^{11}}{11^{11}}$$

ולכן אם יתקיים אי השויון הבא:

$$(20)\quad 5^{20/6}x^{10} \le \frac{x^{11}}{11^{11}}$$

אזי מ- (20) ו- (19) נובע שמתקיים (18).

לכן נראה בהמשך ש- (20) מתקיים לכל $n > N''_0$.

אי השויון (20) שקול ל-

$$(21)\quad 5^{20/6} \le \frac{x}{11^{11}}$$

ששקול ל-

$$(22)\quad 5^{20/6}\cdot 11^{11} \le x$$

נציב חזרה $x = \log_2 n$ ונקבל:

$$(23)\quad 5^{20/6}\cdot 11^{11} \le \log_2 n$$

ששקול ל-

$$(24)\quad 2^{5^{20/6}\cdot 11^{11}} \le n$$

לכן נבחר:

$$N''_0 = 2^{5^{20/6}\cdot 11^{11}}$$

וסימנו את השלב השני.

2. תהי $f(n)=30n^{5/2}\cdot(\log_2 n)^{5/2}+20\sqrt[3]{n}\cdot n^2(\log_2 n)^5$

ותהי $g(n)=n^2\sqrt{n}\cdot(\log_2 n)^3+20\cdot n^2\cdot\log_2 n$

הוכח לפי הגדרה 2 ש- f(n)=O(g(n))

<u>פתרון</u>

מאחר ו-

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{30n^{5/2}(\log_2 n)^{5/2}+20\sqrt[3]{n}\cdot n^2(\log_2 n)^5}{n^2\sqrt{n}(\log_2 n)^3+20\cdot n^2\cdot\log_2 n}=0$$

אפשר לבחור כל קבוע c>0 למשל נבחר c=1. נחפש N_0 כך שעבור כל $n>N_0$ יתקיים:

$$f(n)\le c\cdot g(n)$$

עבור c=1 ועבור הפונקציות f(n) ו- g(n) הנ"ל אי השוויון הנ"ל שקול ל-

$$(1)\quad 30n^{5/2}(\log_2 n)^{5/2}+20\sqrt[3]{n}\cdot n^2(\log_2 n)^5\le n^2\sqrt{n}(\log_2 n)^3+20\cdot n^2\cdot\log_2 n$$

אי השויון (1) נובע מאי השוויון (2) הבא:

$$(2)\quad 30n^{5/2}(\log_2 n)^{5/2}+20\sqrt[3]{n}\cdot n^2(\log_2 n)^5\le n^2\sqrt{n}(\log_2 n)^3$$

אי השויון (2) נובע משני אי השויונות הבאים:

$$(3)\quad 30n^{5/2}(\log_2 n)^{5/2}\le\frac{1}{2}\cdot n^2\sqrt{n}(\log_2 n)^3$$

$$(4)\quad 20\sqrt[3]{n}\cdot n^2(\log_2 n)^5\le\frac{1}{2}\cdot n^2\sqrt{n}(\log_2 n)^3$$

בשלב ראשון נראה שקיים N'_0 כך שעבור כל $n>N'_0$ מתקיים אי שוויון (3).

בשלב שני נראה שקיים N''_0 כך שעבור כל $n>N''_0$ מתקיים אי שוויון (4).

נבחר N_0 ששווה למקסימום בין N'_0 ו- N''_0 ונקבל שעבור כל

$n>N_0$ מתקיימים גם אי שוויון (3) וגם אי שוויון (4) ולכן מתקיים אי שוויון (2) והוכחנו מה שרצינו.

נתאר עכשיו את השלב הראשון, נתחיל עם אי שוויון (3):

$$(3)\quad 30n^{5/2}(\log_2 n)^{5/2}\le\frac{1}{2}\cdot n^2\sqrt{n}(\log_2 n)^3$$

ששקול ל-

$$30(\log_2 n)^{5/2}\le\frac{1}{2}\cdot(\log_2 n)^3$$

ששקול ל-

$$60\le(\log_2 n)^{1/2}$$

ששקול ל-

$$3600\le\log_2 n$$

ששקול ל-

$$2^{3600}\le n$$

לכן נבחר:

$$N'_0=2^{3600}$$

וסימנו את השלב הראשון.

נתאר עכשיו את השלב השני, נתחיל עם אי שוויון (4):

$$(4)\quad 20\sqrt[3]{n}\cdot n^2(\log_2 n)^5\le\frac{1}{2}\cdot n^2\sqrt{n}(\log_2 n)^3$$

ששקול ל-

$$40\sqrt[3]{n}\cdot(\log_2 n)^5\le\sqrt{n}(\log_2 n)^3$$

ששקול ל-

$$40\cdot(\log_2 n)^2\le n^{1/6}$$

ששקול ל-

$$(5)\quad 40^6\cdot(\log_2 n)^{12}\le n$$

נציב $x=\log_2 n$ ונקבל שאי השוויון (5) שקול ל-

$$(6)\quad 40^6\cdot x^{12}\le 2^x$$

ידוע שלכל x מתקיים:

$$(7)\quad x\le 2^x$$

ולכן נקבל שלכל x מתקיים:

$$(8)\quad 2^{x}=2^{\left(\frac{x}{13}+\frac{x}{13}+\cdots+\frac{x}{13}\right)}\geq\frac{x}{13}\cdot\frac{x}{13}\cdots\frac{x}{13}=\frac{x^{13}}{13^{13}}$$

ולכן אם יתקיים אי השויון הבא:

$$(9)\quad 40^{6}\cdot x^{12}\leq\frac{x^{13}}{13^{13}}$$

אזי מ- (9) ו- (8) נובע שמתקיים (6).

לכן נראה בהמשך ש- (9) מתקיים לכל $n>N''_0$.

אי השויון (9) שקול ל-

$$(10)\quad 40^{6}\leq\frac{x}{13^{13}}$$

ששקול ל-

$$(11)\quad 40^{6}\cdot 13^{13}\leq x$$

נציב חזרה $x=\log_2 n$ ונקבל:

$$(12)\quad 40^{6}\cdot 13^{13}\leq \log_2 n$$

ששקול ל-

$$(13)\quad 2^{40^{6}\cdot 13^{13}}\leq n$$

לכן נבחר:

$$N''_0=2^{40^{6}\cdot 13^{13}}$$

וסימנו את השלב השני.

3. תהי
$$f(n)=20\sqrt[3]{n}\cdot(\log_2 n)^3$$

ותהי
$$g(n)=50\sqrt[3]{n}\cdot(\log_2 n)^2+80\sqrt[4]{n}\cdot(\log_2 n)^5$$

הוכח לפי הגדרה 2 ש- $f(n)=\Omega(g(n))$

<u>פתרון</u>

מאחר ו-

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{50\sqrt[3]{n}\cdot(\log_2 n)^2+80\sqrt[4]{n}\cdot(\log_2 n)^5}{20\sqrt[3]{n}\cdot(\log_2 n)^3}=0$$

אפשר לבחור כל קבוע $c>0$ למשל נבחר $c=1$. נחפש N_0 כך שעבור כל $n>N_0$ יתקיים:

$$f(n)\geq c\cdot g(n)$$

עבור $c=1$ ועבור הפונקציות $f(n)$ ו- $g(n)$ הנ"ל אי השוויון הנ"ל שקול ל-

$$(1)\quad 20\sqrt[3]{n}\cdot(\log_2 n)^3\geq 50\sqrt[3]{n}\cdot(\log_2 n)^2+80\sqrt[4]{n}\cdot(\log_2 n)^5$$

אי השויון (1) נובע משני אי השויונות הבאים:

$$(2)\quad 10\sqrt[3]{n}\cdot(\log_2 n)^3\geq 50\sqrt[3]{n}\cdot(\log_2 n)^2$$

$$(3)\quad 10\sqrt[3]{n}\cdot(\log_2 n)^3\geq 80\sqrt[4]{n}\cdot(\log_2 n)^5$$

בשלב ראשון נראה שקיים N'_0 כך שעבור כל $n>N'_0$ מתקיים אי שוויון (2).

בשלב שני נראה שקיים N''_0 כך שעבור כל $n>N''_0$ מתקיים אי שוויון (3).

נבחר N_0 ששווה למקסימום בין N'_0 ו- N''_0 ונקבל שעבור כל $n>N_0$ מתקימים גם אי שוויון (2) וגם אי שוויון (3) ולכן מתקיים אי שוויון (1) והוכחנו מה שרצינו.

נתאר עכשיו את השלב הראשון, נתחיל עם אי שוויון (2):

$$(2)\quad 10\sqrt[3]{n}\cdot(\log_2 n)^3\geq 50\sqrt[3]{n}\cdot(\log_2 n)^2$$

ששקול ל-

$$10\cdot(\log_2 n)^3\geq 50\cdot(\log_2 n)^2$$

ששקול ל-

$\log_2 n \ge 5$

ששקול ל-

$n \ge 2^5$

לכן נבחר:

$N'_0 = 2^5$

וסימנו את השלב הראשון.

נתאר עכשיו את השלב השני, נתחיל עם אי שוויון (3):

$$(3) \quad 10\sqrt[3]{n}\cdot(\log_2 n)^3 \ge 80\sqrt[4]{n}\cdot(\log_2 n)^5$$

ששקול ל-

$$n^{1/12} \ge 8\cdot(\log_2 n)^2$$

ששקול ל-

$$(5) \quad n \ge 8^{12}\cdot(\log_2 n)^{24}$$

נציב $x = \log_2 n$ ונקבל שאי השוויון (5) שקול ל-

$$(6) \quad 2^x \ge 8^{12}\cdot x^{24}$$

ידוע שלכל x מתקיים:

$$(7) \quad 2^x \ge x$$

ולכן נקבל שלכל x מתקיים:

$$(8) \quad 2^x = 2^{\left(\frac{x}{25}+\frac{x}{25}+...+\frac{x}{25}\right)} \ge \frac{x}{25}\cdot\frac{x}{25}\cdots\frac{x}{25} = \frac{x^{25}}{25^{25}}$$

ולכן אם יתקיים אי השויון הבא:

$$(9) \quad \frac{x^{25}}{25^{25}} \ge 8^{12}\cdot x^{24}$$

אזי מ- (9) ו- (8) נובע שמתקיים (6).

לכן נראה בהמשך ש- (9) מתקיים לכל $n>N''_0$.

אי השויון (9) שקול ל-

$$(10) \quad \frac{x}{25^{25}} \ge 8^{12}$$

ששקול ל-

$$(11)\quad x \geq 25^{25} \cdot 8^{12}$$

נציב חזרה $x = \log_2 n$ ונקבל:

$$(12)\quad \log_2 n \geq 25^{25} \cdot 8^{12}$$

ששקול ל-

$$(13)\quad n \geq 2^{25^{25} \cdot 8^{12}}$$

לכן נבחר:

$$N''_0 = 2^{25^{25} \cdot 8^{12}}$$

וסימנו את השלב השני.

4. תהי $f(n) = 5(\log_2 n)^6$

ותהי $g(n) = 8(\log_4 n)^6$

הוכח לפי הגדרה 2 ש- $f(n)=\theta(g(n))$

<u>פתרון</u>

מכדי להוכיח את הטענה לפי הגדרה 2, צריך למצוא 3 קבועים חיובים c_1 c_2 ו- N_0 כך שלכל $n \geq N_0$

מתקיים: $(1)\quad c_1\cdot g(n)\le f(n)\le c_2\cdot g(n)$

אנחנו נראה שקיים c כך ש- $(2)\quad f(n)=c\cdot g(n)$

ולכן אם נבחר $c_1=c$ ו- $c_2=c$ ו- N_0 חיובי כלשהו,

למשל $N_0=1$ נקבל שאי שוויון (1) מתקיים לכל $n\ge N_0$.

נראה שקיים c כך ששוויון (2) מתקיים.

שוויון (2) שקול לשוויון הבא:

$$(3)\quad 5\cdot(\log_2 n)^6=c\cdot 8(\log_4 n)^6$$

ששקול ל-

$$(4)\quad c=\frac{5(\log_2 n)^6}{8(\log_4 n)^6}$$

לפי חוקי לוגים נקבל ש-

$$(5)\quad \log_2 n=\frac{\log_4 n}{\log_4 2}$$

משוויון (5) נקבל ששוויון (4) שקול ל-

$$(4)\quad c=\frac{5\left(\frac{\log_4 n}{\log_4 2}\right)^6}{8(\log_4 n)^6}=\frac{5}{8(\log_4 2)^6}$$

ולכן עבור $c=\frac{5}{8(\log_4 2)^6}$ נקבל ששוויון (2) מתקיים.

5. תהי $f(n)=2^{4n^2+5\log_4 n}$

ותהי

$$g(n)=\log_3 n\cdot 2^{5n^2}$$

איזה מהיחסים הבאים מתקיים:

$f(n)=O(g(n))$ $f(n)=\Omega(g(n))$ $f(n)=\theta(g(n))$

הוכח את תשובתך (ניתן להשתמש בהגדרה 1 או בהגדרה 2).

<u>**פתרון**</u>

בשאלה הזו ובשאלה 6 רבים טעו, כי הסתמכו על פתרון שגוי של שאלה דומה בשנה שעברה (לפני שהפתרון השגוי תוקן).

נשתמש בחוק הבא הנובע מגבולות:

אם קימים הגבולות $\lim_{n\to\infty} f(n)$ ו- $\lim_{n\to\infty} g(n)$ אזי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} f(n)\cdot g(n)=\lim_{n\to\infty} f(n)\cdot\lim_{n\to\infty} g(n)$$

נראה לפי הגדרה 1 שמתקיים: $f(n)=O(g(n))$

זאת אומרת, נראה שמתקיים:

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$$

בנוסף לכך נראה שלא מתקיים $f(n)=\Omega(g(n))$ על ידי כך שנראה שמתקים:

$$(2)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}=\infty$$

ולכן נסיק שמתקיים רק: $f(n)=O(g(n))$

נראה שמתקיים (1):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n^2+5\log_4 n}}{\log_3 n\cdot 2^{5n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n^2}\cdot 2^{5\log_4 n}}{\log_3 n\cdot 2^{4n^2}\cdot 2^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{5\log_4 n}}{\log_3 n\cdot 2^{n^2}}=0$$

הגבול האחרון במשוואה שלמעלה שווה ל- 0 כי:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{5\log_4 n}}{\log_3 n\cdot 2^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log_3 n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2^{5\log_4 n}}{2^{n^2}}=0\cdot 0=0$$

הגבול האחרון במשוואה שלמעלה שווה ל-0 כי:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{5\log_4 n}}{2^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n^2-5\log_4 n}} = 0$$

נראה שמתקיים (2):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_3 n \cdot 2^{5n^2}}{2^{4n^2+5\log_4 n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_3 n \cdot 2^{4n^2} \cdot 2^{n^2}}{2^{4n^2} \cdot 2^{5\log_4 n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_3 n \cdot 2^{n^2}}{2^{5\log_4 n}} = \infty$$

הגבול האחרון במשוואה שלמעלה שווה ל- ∞ כי לפי חוקי גבולות אם מתקיים: $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ ו- $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$ אזי מתקים: $\lim_{n\to\infty} f(n) \cdot g(n) = \infty$

ומאחר ו-

$$\lim_{n\to\infty} \log_3 n = \infty$$

ו-

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{2^{5\log_4 n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{n^2-5\log_4 n} = \infty$$

נקבל ש-

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_3 n \cdot 2^{n^2}}{2^{5\log_4 n}} = \infty$$

6. תהי $f(n)=\sqrt{n}\cdot 5^{n^2}$

ותהי

$g(n)=n^2\cdot 3^{2n^2}$

איזה מהיחסים הבאים מתקיים:

f(n)=O(g(n))   f(n)=Ω(g(n))   f(n)=θ(g(n))

הוכח את תשובתך (ניתן להשתמש בהגדרה 1 או בהגדרה 2).

<u>פתרון</u>

נראה לפי הגדרה 1 שמתקיים: $f(n)=O(g(n))$

זאת אומרת, נראה שמתקיים:

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$$

בנוסף לכך נראה שלא מתקיים $f(n)=\Omega(g(n))$ על ידי כך שנראה שמתקיים:

$$(2)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}=\infty$$

ולכן נסיק שמתקיים רק: $f(n)=O(g(n))$

נראה שמתקיים (1):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot 5^{n^2}}{n^2\cdot 3^{2n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n^2}}{n^{3/2}\cdot 3^{2n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{3/2}}\cdot\lim_{n\to\infty}(5/9)^{n^2}=0\cdot 0=0$$

נראה שמתקיים (2):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot 3^{2n^2}}{\sqrt{n}\cdot 5^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{3/2}\cdot 3^{2n^2}}{5^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}n^{3/2}\cdot(9/5)^{n^2}=\infty$$