ביה"ס למדעי המחשב ומתמטיקה
המכללה האקדמית נתניה
סמסטר ב' תשע"ז

5.4.2017

<u>מבני נתונים</u>
<u>פתרון תרגיל מס' 1</u>

1. תהי $$f(n)=20\sqrt[3]{n^5}\cdot(\log_2 n)^6+15\sqrt[4]{n^7}\cdot(\log_3 n)^4$$

ותהי $$g(n)=n^2+\sqrt[5]{n}\cdot(\log_3 n)^6$$

הוכח לפי הגדרה 2 (דהינו ההגדרה עם הקבועים c ו- n_0) ש-
$f(n)=O(g(n))$

<u>פתרון שאלה 1</u>

מאחר ו-

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{20\sqrt[3]{n^5}\cdot(\log_2 n)^6+15\sqrt[4]{n^7}\cdot(\log_3 n)^4}{n^2+\sqrt[5]{n}\cdot(\log_3 n)^6}=0$$

לכן אפשר לבחור כל קבוע $c>0$ למשל נבחר $c=1$. נחפש N_0 כך שעבור כל $n>N_0$ יתקיים:

$$f(n)\le c\cdot g(n)$$

עבור $c=1$ ועבור הפונקציות $f(n)$ ו- $g(n)$ הנ"ל אי השוויון הנ"ל שקול ל-

$$(1)\quad 20\sqrt[3]{n^5}\cdot(\log_2 n)^6+15\sqrt[4]{n^7}\cdot(\log_3 n)^4\le n^2+\sqrt[5]{n}\cdot(\log_3 n)^6$$

אי השויון (1) נובע משני אי השויונות הבאים:

$$(2)\quad 20\sqrt[3]{n^5}\cdot(\log_2 n)^6\le\frac{n^2}{2}$$

$$(3)\quad 15\sqrt[4]{n^7}\cdot(\log_3 n)^4\le\frac{n^2}{2}$$

בשלב ראשון נראה שקיים N'_0 כך שעבור כל $n>N'_0$ מתקיים אי שוויון (2).
בשלב שני נראה שקיים N''_0 כך שעבור כל $n>N''_0$ מתקיים אי שוויון (3).

נבחר N_0 ששווה למקסימום בין N'_0 ו- N''_0 ונקבל שעבור כל $n>N_0$ מתקימים גם אי שוויון (2) וגם אי שוויון (3) ולכן מתקיים אי שוויון (1) והוכחנו מה שרצינו.

נתאר עכשיו את השלב הראשון, נתחיל עם אי שוויון (2):

$$(2)\quad 20\sqrt[3]{n^5}\cdot(\log_2 n)^6\le\frac{n^2}{2}$$

ששקול ל-

$$20^3 n^5\cdot(\log_2 n)^{18}\le\frac{n^6}{8}$$

ששקול ל-

$$(4)\quad 20^3\cdot 8\cdot(\log_2 n)^{18}\le n$$

נציב:

$$x=\log_2 n$$

ששקול ל-

$$n=2^x$$

נציב את שני השוויונות האחרונים באי שוויון (4) ונקבל:

$$(5)\quad 20^3\cdot 8\, x^{18}\le 2^x$$

ידוע שלכל x מתקיים:

$$(6)\quad x\le 2^x$$

ולכן נקבל שלכל x מתקיים:

$$(7)\quad 2^x=2^{\left(\frac{x}{19}+\frac{x}{19}+\cdots+\frac{x}{19}\right)}\ge\frac{x}{19}\cdot\frac{x}{19}\cdots\frac{x}{19}=\frac{x^{19}}{19^{19}}$$

ולכן אם יתקיים אי השויון הבא:

$$(8)\quad 20^3\cdot 8\, x^{18}\le\frac{x^{19}}{19^{19}}$$

אזי מ- (8) ו- (7) נובע שמתקיים (5).

לכן נראה בהמשך ש- (8) מתקיים לכל $n>N'_0$.

אי השויון (8) שקול ל-

$$(9)\quad 20^3\cdot 8\le \frac{x}{19^{19}}$$

ששקול ל-

$$(10)\quad 20^3\cdot 8\cdot 19^{19}\le x$$

נציב חזרה $x=\log_2 n$ ונקבל:

$$(11)\quad 20^3\cdot 8\cdot 19^{19}\le \log_2 n$$

ששקול ל-

$$(12)\quad 2^{20^3\cdot 8\cdot 19^{19}}\le n$$

לכן נבחר:

$$N'_0=2^{20^3\cdot 8\cdot 19^{19}}$$

וסימנו את השלב הראשון.

נתאר עכשיו את השלב השני, נתחיל עם אי שוויון (3):

$$(3)\quad 15\sqrt[4]{n^7}\cdot(\log_3 n)^4\le \frac{n^2}{2}$$

ששקול ל-

$$(14)\quad 15^4 n^7\cdot(\log_3 n)^{16}\le \frac{n^8}{16}$$

ששקול ל-

$$(15)\quad 16\cdot 15^4\cdot(\log_3 n)^{16}\le n$$

נסתכל על אי השוויון הבא:

כמו במקרה הקודם נציב $x=\log_3 n$ ונקבל שאי שוויון (15)
שקול לאי השויון הבא:

$$(16)\quad 16\cdot 15^4 x^{16}\le 3^x$$

כמו במקרה הקודם נקבל שידוע ש-

$$(17)\quad 3^{x}=3^{\left(\frac{x}{17}+\frac{x}{17}+\cdots+\frac{x}{17}\right)}\geq\frac{x}{17}\cdot\frac{x}{17}\cdots\frac{x}{17}=\frac{x^{17}}{17^{17}}$$

ולכן אם יתקיים אי השויון הבא:

$$(18)\quad 16\cdot 15^{4}\,x^{16}\leq\frac{x^{17}}{17^{17}}$$

אזי מ- (17) ו- (18) נובע שמתקיים (16).

לכן נראה בהמשך ש- (18) מתקיים לכל $n>N''_0$.

אי השויון (18) שקול ל-

$$(19)\quad 16\cdot 15^{4}\leq\frac{x}{17^{17}}$$

ששקול ל-

$$(20)\quad 16\cdot 15^{4}\cdot 17^{17}\leq x$$

נציב חזרה $x=\log_3 n$ ונקבל:

$$(21)\quad 16\cdot 15^{4}\cdot 17^{17}\leq\log_3 n$$

ששקול ל-

$$(22)\quad 3^{16\cdot 15^{4}\cdot 17^{17}}\leq n$$

לכן נבחר:

$$N''_0=3^{16\cdot 15^{4}\cdot 17^{17}}$$

וסימנו את השלב השני.

2. תהי $f(n)=\sqrt{n}\cdot(\log_2 n)^3$

ותהי $g(n)=40\sqrt[9]{n^4}\cdot(\log_2 n)^5+25\sqrt[4]{n^2\cdot(\log_2 n)^{12}}$

הוכח לפי הגדרה 2 ש- $f(n)=\Omega(g(n))$

<u>פתרון שאלה 2</u>

מאחר ו-

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot(\log_2 n)^3}{40\sqrt[9]{n^4}\cdot(\log_2 n)^5+25\sqrt[4]{n^2\cdot(\log_2 n)^{12}}}=\frac{1}{25}$$

אפשר לבחור כל קבוע c כך ש- $0<c<\frac{1}{25}$ למשל נבחר $c=\frac{1}{100}$.
נחפש N_0 כך שעבור כל $n>N_0$ יתקיים:

$$f(n)\geq c\cdot g(n)$$

עבור $c=\frac{1}{100}$ ועבור הפונקציות $f(n)$ ו- $g(n)$ הנ"ל אי השוויון הנ"ל שקול ל-

$$(1)\quad \sqrt{n}\cdot(\log_2 n)^3\geq\frac{1}{100}\cdot\left(40\sqrt[9]{n^4}\cdot(\log_2 n)^5+25\sqrt[4]{n^2\cdot(\log_2 n)^{12}}\right)$$

ששקול ל-

$$(2)\quad 75\sqrt{n}\cdot(\log_2 n)^3\geq 40\sqrt[9]{n^4}\cdot(\log_2 n)^5$$

ששקול ל-

$$(3)\quad 75^{18}n^9\cdot(\log_2 n)^{54}\geq 40^{18}n^8\cdot(\log_2 n)^{90}$$

ששקול ל-

$$(4)\quad n\geq\frac{40^{18}}{75^{18}}\cdot(\log_2 n)^{36}$$

נציב:

$$x=\log_2 n$$

ששקול ל-

$$n=2^x$$

נציב את שני השוויונות האחרונים באי שוויון (4) ונקבל:

$$(5)\quad 2^x \geq \frac{40^{18}}{75^{18}}\cdot x^{36}$$

כמו בתרגיל הקודם נקבל שידוע ש-

$$(6)\quad 2^x=2^{\left(\frac{x}{37}+\frac{x}{37}+...+\frac{x}{37}\right)}\geq\frac{x}{37}\cdot\frac{x}{37}\cdots\frac{x}{37}=\frac{x^{37}}{37^{37}}$$

ולכן אם יתקיים אי השויון הבא:

$$(7)\quad \frac{40^{18}}{75^{18}}\cdot x^{36}\leq\frac{x^{37}}{37^{37}}$$

אזי מ- (6) ו- (7) נובע שמתקיים (5).

לכן נראה בהמשך ש- (7) מתקיים לכל $n>N_0$.

אי השויון (7) שקול ל-

$$(8)\quad \frac{40^{18}}{75^{18}}\leq\frac{x}{37^{37}}$$

ששקול ל-

$$(9)\quad \frac{40^{18}}{75^{18}}\cdot 37^{37}\leq x$$

נציב חזרה $x=\log_2 n$ ונקבל:

$$(10)\quad \frac{40^{18}}{75^{18}}\cdot 37^{37}\leq\log_2 n$$

ששקול ל-

$$(11)\quad 2^{\frac{40^{18}}{75^{18}}\cdot 37^{37}}\leq n$$

לכן נבחר:

$$N_0 = 2^{\frac{40^{18}}{75^{18}} \cdot 37^{37}}$$

3. תהי $f(n)=\log_2(8n^2+2n+9)$

ותהי $g(n)=\log_5(6n+100)$

הוכח לפי הגדרה 2 ש- $f(n)=\theta(g(n))$

<u>פתרון שאלה 3</u>

נפתור את השאלה בשני שלבים. בשלב ראשון נראה לפי הגדרה 2 ש- $f(n)=O(g(n))$ ובשלב השני נראה לפי הגדרה 2 ש- $f(n)=\Omega(g(n))$.

נתחיל עם השלב הראשון.

מאחר ו-

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2(8n^2+2n+9)}{\log_5(6n+100)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2(8n^2+2n+9)\cdot\log_2 5}{\log_2(6n+100)}=2\log_2 5$$

לכן אפשר לבחור כל קבוע $c>2\log_2 5$ למשל נבחר $c=100$.
נחפש N_0 כך שעבור כל $n>N_0$ יתקיים:

$$f(n)\le c\cdot g(n)$$

עבור $c=100$ ועבור הפונקציות $f(n)$ ו- $g(n)$ הנ"ל אי השוויון הנ"ל שקול ל-

$$(1)\quad \log_2(8n^2+2n+9)\le 100\cdot\log_5(6n+100)$$

אי השויון (1) נובע מאי השוויון (2) הבא:

$$(2)\quad \log_2(8n^2+2n+9)\le 100\cdot\log_5(6n)$$

אי השויון (2) נובע מאי השוויון (3) הבא עבור כל עבור כל n שמקיים:
$2n^2\ge 2n+9$

$$(3)\quad \log_2(10n^2) \le 100 \cdot \log_5(6n)$$

אי השוויון $2n^2 \ge 2n+9$ מתקיים עבור כל $n \ge 3$

אי השויון (3) שקול לאי השוויון (4) הבא:

$$(4)\quad \log_2(10n^2) \le 100 \cdot \frac{\log_2(6n)}{\log_2 5}$$

אי השויון (4) נובע מאי השוויון (5) הבא:

$$(5)\quad \log_2(10n^2) \le 10 \cdot \log_2(6n)$$

ששקול ל-

$$(6)\quad \log_2 10 + 2\log_2 n \le 10 \cdot \log_2 6 + 10\log_2 n$$

ששקול ל-

$$(7)\quad \log_2 10 - 10 \cdot \log_2 6 \le 8\log_2 n$$

מאחר ואגף שמאל של (7) הוא מספר שלילי אי השויון (7) נובע מאי השוויון (8) הבא:

$$(8)\quad 0 \le \log_2 n$$

ששקול ל-

$$(9)\quad 1 \le n$$

מאחר ובדרך הינו צריכים ש- n יקיים $n > 3$ נבחר $N_0=3$ וסימנו את השלב הראשון.

נמשיך עם השלב השני.

מאחר ו-

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2(8n^2+2n+9)}{\log_5(6n+100)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2(8n^2+2n+9)\cdot \log_2 5}{\log_2(6n+100)} = 2\log_2 5$$

לכן אפשר לבחור כל קבוע $c < 2\log_2 5$ למשל נבחר $c=1$. נחפש N_0 כך שעבור כל $n>N_0$ יתקיים:

$f(n) \ge c \cdot g(n)$

עבור c=1 ועבור הפונקציות f(n) ו- g(n) הנ"ל אי השוויון הנ"ל שקול ל-

$(1) \quad \log_2(8n^2+2n+9) \ge 1 \cdot \log_5(6n+100)$

אי השויון (1) נובע מאי השוויון (2) הבא:

$(2) \quad \log_2(8n^2) \ge \log_5(6n+100)$

אי השויון (2) נובע מאי השוויון (3) הבא עבור כל $n \ge 100$ **:**

$(3) \quad \log_2(8n^2) \ge \log_5(6n+n)$

ששקול ל-

$(4) \quad \log_2(8n^2) \ge \frac{\log_2(7n)}{\log_2 5}$

אי השויון (4) נובע מאי השוויון (5) הבא:

$(5) \quad \log_2(8n^2) \ge \log_2(7n)$

ששקול ל-

$(6) \quad \log_2 8 + 2\log_2 n \ge \log_2 7 + \log_2 n$

ששקול ל-

$(7) \quad \log_2 n \ge \log_2 7 - \log_2 8$

מאחר ואגף ימין של (7) הוא מספר שלילי אי השויון (7) נובע מאי השוויון (8) הבא:

$(8) \quad 0 \le \log_2 n$

ששקול ל-

$(9) \quad 1 \le n$

מאחר ובדרך הינו צריכים ש- n יקיים $n \ge 100$ **נבחר** $N_0=100$ **וסימנו את השלב השני.**

4. תהי $f(n)=\log_2(3^{2n^2}+6n^5)$

ותהי $g(n)=\log_3(2^{n^3}+9n^7)$

איזה מהיחסים הבאים מתקיים:

f(n)=θ(g(n))   f(n)=Ω(g(n))   f(n)=O(g(n))

לפתרון תרגילים 4,5 נשתמש בתכונה הבאה של גבולות:

בחישובי גבולות אפשר להסתמך על הטענה הבאה:

אם קיים קבוע N_0 כך שלכל $n \geq N_0$ מתקיים: $f(n) \leq g(n)$

אזי: $\lim_{n\to\infty} f(n) \leq \lim_{n\to\infty} g(n)$

באותו אופן מתקיים:

אם קיים קבוע N_0 כך שלכל $n \geq N_0$ מתקיים: $f(n) \geq g(n)$

אזי: $\lim_{n\to\infty} f(n) \geq \lim_{n\to\infty} g(n)$

<u>**פתרון שאלה 4**</u>

עבור כל n שמקיים $n^5 \leq 3^{2n^2}$ מתקיים:

$$(1)\quad \frac{\log_2(3^{2n^2}+6n^5)}{\log_3(2^{n^3}+9n^7)} \leq \frac{\log_2(3^{2n^2}+6\cdot 3^{2n^2})}{\log_3(2^{n^3})}$$

מאחר ו- $n^5 \leq 3^{2n^2}$ מתקיים עבור כל $n \geq 1$ אי השוויון (1) מתקיים עבור כל $n \geq 1$.

אי השוויון (1) שקול לאי השוויון (2) הבא:

$$(2)\quad \frac{\log_2\left(3^{2n^2}+6n^5\right)}{\log_3\left(2^{n^3}+9n^7\right)} \le \frac{\log_2\left(7\cdot 3^{2n^2}\right)}{\log_3\left(2^{n^3}\right)}$$

ששקול ל-

$$(3)\quad \frac{\log_2\left(3^{2n^2}+6n^5\right)}{\log_3\left(2^{n^3}+9n^7\right)} \le \frac{\log_2(7)+2n^2\cdot\log_2 3}{n^3\log_3(2)}$$

ולכן נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2\left(3^{2n^2}+6n^5\right)}{\log_3\left(2^{n^3}+9n^7\right)} \le \lim_{n\to\infty}\frac{\log_2(7)+2n^2\cdot\log_2 3}{n^3\log_3(2)}=0$$

ולכן הראנו ש- $f(n)=O(g(n))$ לפי הגדרה 1.

כעת נראה שלא מתקיים $f(n)=\Omega(g(n))$

עבור כל n שמקיים $n^5\le 3^{2n^2}$ מתקיים:

$$(4)\quad \frac{\log_3\left(2^{n^3}+9n^7\right)}{\log_2\left(3^{2n^2}+6n^5\right)} \ge \frac{\log_3\left(2^{n^3}\right)}{\log_2\left(3^{2n^2}+6\cdot 3^{2n^2}\right)}$$

מאחר ו- $n^5\le 3^{2n^2}$ מתקיים עבור כל $n\ge 1$ אי השוויון (1) מתקיים עבור כל $n\ge 1$.

אי השוויון (4) שקול לאי השוויון (5) הבא:

$$(5)\quad \frac{\log_3\left(2^{n^3}+9n^7\right)}{\log_2\left(3^{2n^2}+6n^5\right)} \geq \frac{n^3\log_3(2)}{\log_2(7)+2n^2\cdot\log_2 3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{g(n)}{f(n)}\right)=\frac{\lim_{n\to\infty}\log_3\left(2^{n^3}+9n^7\right)}{\log_2\left(3^{2n^2}+6n^5\right)} \geq \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\log_3(2)}{\log_2(7)+2n^2\cdot\log_2 3}=\infty$$

ולכן הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{g(n)}{f(n)}\right)$ אינו קיים ולפי הגדרה 1 לא מתקיים

הקשר $f(n)=\Omega(g(n))$.

5. תהי $$f(n)=6^{2n^{3^{\log_2 n}}}$$

ותהי $$g(n)=5^{4n^{2^{2\log_2 n}}}$$

איזה מהיחסים הבאים מתקיים:

$f(n)=\theta(g(n))$ $\quad$ $f(n)=\Omega(g(n))$ $\quad$ $f(n)=O(g(n))$

הוכח את תשובתך (ניתן להשתמש בהגדרה 1 או בהגדרה 2).

<u>פתרון שאלה 5</u>

מתקיים:

$$(1)\quad 2n^{3^{\log_2 n}}=2n^{3^{(\log_3 n/\log_2 3)}}=2n^{n^{1/\log_2 3}}$$

$$(2)\quad 4n^{2^{2\log_2 n}} = 4n^{2^{\log_2(n^2)}} = 4n^{n^2}$$

ולכן נקבל ש-

$$(3)\quad f(n) = 6^{2n^{3^{\log_2 n}}} = 6^{2n^{n^{1/\log_2 3}}}$$

$$(4)\quad g(n) = 5^{4n^{2^{2\log_2 n}}} = 5^{4n^{n^2}}$$

$$(5)\quad \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{6^{2n^{n^{1/\log_2 3}}}}{5^{4n^{n^2}}} \le \frac{6^{2n^n}}{5^{4n^{n^2}}} = \frac{6^{2n^n}}{(5^2)^{2n^{n^2}}} < \frac{6^{2n^n}}{6^{2n^{n^2}}}$$

מאי שוויון (5) נקבל ש-

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) < \lim_{n\to\infty}\frac{6^{2n^n}}{6^{2n^{n^2}}} = 0$$

ולכן הראנו ש- f(n)=O(g(n)) לפי הגדרה 1.

באופן דומה נקבל ש-

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{g(n)}{f(n)}\right) > \lim_{n\to\infty}\frac{6^{2\mathrm{n}^{n^2}}}{6^{2\mathrm{n}^{n}}} = \infty$$

ולכן הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{g(n)}{f(n)}\right)$ **אינו קיים ולפי הגדרה 1 לא מתקיים**

הקשר $f(n)=\Omega(g(n))$.