ביה"ס למדעי המחשב ומתמטיקה האקדמית נתניה
סמסטר ב' תשע"ח

18.3.2018

<u>מבני נתונים</u>
<u>פתרון תרגיל מס' 1</u>

1. תהי $f(n)=40 \cdot n \cdot \sqrt{n^5} \cdot (\log_2 n)^3 + 15\sqrt{n} \cdot (\log_2 n)^8 \cdot (\log_3 n)^4$

ותהי $g(n)=n^{3.5} \cdot (\log_3 n)^3 + \sqrt[5]{n} \cdot (\log_3 n)^6$

הוכח לפי הגדרה 2 (דהינו ההגדרה עם הקבועים c ו- n_0) ש- f(n)=O(g(n))

<u>פתרון שאלה 1 מתרגיל 1</u>

מאחר ו-

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{40 \cdot n \cdot \sqrt{n^5} \cdot (\log_2 n)^3 + 15\sqrt{n} \cdot (\log_2 n)^8 \cdot (\log_3 n)^4}{n^{3.5} \cdot (\log_3 n)^3 + \sqrt[5]{n} \cdot (\log_3 n)^6}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{40 \cdot (\log_2 n)^3}{(\log_3 n)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{40 \cdot (\log_3 n/\log_3 2)^3}{(\log_3 n)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{40}{(\log_3 2)^3}=159.263$$

לכן אפשר לבחור כל קבוע c>159.263 למשל נבחר c=200. נחפש N_0 כך שעבור כל $n>N_0$ יתקיים:

$$f(n)\le c\cdot g(n)$$

עבור c=200 ועבור הפונקציות f(n) ו- g(n) הנ"ל אי השוויון הנ"ל שקול ל-

$$40 \cdot n \cdot \sqrt{n^5} \cdot (\log_2 n)^3 + 15\sqrt{n} \cdot (\log_2 n)^8 \cdot (\log_3 n)^4 \le 200 \cdot (n^{3.5} \cdot (\log_3 n)^3 + \sqrt[5]{n} \cdot (\log_3 n)^6)$$

ששקול ל-

$$40 \cdot n \cdot \sqrt{n^5} \cdot (\log_2 n)^3 + 15\sqrt{n} \cdot (\log_2 n)^8 \cdot (\log_3 n)^4 \le 200 \cdot (n^{3.5} \cdot (\log_2 n/\log_2 3)^3 + \sqrt[5]{n} \cdot (\log_3 n)^6)$$

ששקול ל-

$$(1)\quad (200/(\log_2 3)^3-40)\cdot n\cdot\sqrt{n^5}\cdot(\log_2 n)^3+200\cdot\sqrt[5]{n}\cdot(\log_3 n)^6-15\sqrt{n}\cdot(\log_2 n)^8\cdot(\log_3 n)^4\geq 0$$

מאחר ו- $200/(\log_2 3)^3-40$ שווה בערך ל- 10.23 אי השוויון (1) נובע מאי השויון הבא:

$$10\cdot n^{3.5}\cdot(\log_2 n)^3-15\sqrt{n}\cdot(\log_2 n)^8\cdot(\log_3 n)^4\geq 0$$

ששקול ל-

$$10\cdot n^3\cdot(\log_2 n)^3\geq 15\cdot(\log_2 n)^8\cdot(\log_3 n)^4$$

ששקול ל-

$$2\cdot n^3\geq 3\cdot(\log_2 n)^8\cdot\log_3 n$$

ששקול ל-

$$(2)\quad n^3\geq\frac{3\cdot(\log_2 n)^9}{2\cdot\log_2 3}$$

נציב:

$$x=\log_2 n$$

ששקול ל-

$$n=2^x$$

נציב את שני השוויונות האחרונים באי שוויון (2) ונקבל:

$$(3)\quad 2^{3x}\geq\frac{3\cdot x^9}{2\cdot\log_2 3}$$

ידוע שלכל x מתקיים:

$$2^x\geq x$$

ולכן לכל x מתקיים:

$$2^{3x}\geq 3x$$

ולכן נקבל שלכל x מתקיים:

$$(4)\quad 2^{3x}=2^{\left(\frac{3x}{10}+\frac{3x}{10}+\cdots+\frac{3x}{10}\right)}\geq\frac{3x}{10}\cdot\frac{3x}{10}\cdots\frac{3x}{10}=\frac{3^{10}\cdot x^{10}}{10^{10}}$$

ולכן אם יתקיים אי השויון הבא:

$$(5)\quad \frac{3^{10}\cdot x^{10}}{10^{10}}\geq\frac{3\cdot x^{9}}{2\cdot\log_2 3}$$

אזי מ- (4) ו- (5) נובע שמתקיים (3).

לכן נראה בהמשך ש- (5) מתקיים לכל $n>N_0$.

אי השויון (5) שקול ל-

$$(6)\quad x\geq\frac{10^{10}}{3^{9}\cdot 2\cdot\log_2 3}$$

נציב חזרה $x=\log_2 n$ ונקבל:

$$(7)\quad \log_2 n\geq\frac{10^{10}}{3^{9}\cdot 2\cdot\log_2 3}$$

ששקול ל-

$$(8)\quad n\geq 2^{\frac{10^{10}}{3^{9}\cdot 2\cdot\log_2 3}}$$

לכן נבחר:

$$N_0=2^{\frac{10^{10}}{3^{9}\cdot 2\cdot\log_2 3}}$$

2. תהי $f(n)=\left(\sqrt{n}\right)^3\cdot n^2\cdot\left(\log_2 n\right)^3$

ותהי $g(n)=15n^3\cdot\left(\log_2 n\right)^3+25\sqrt[4]{n^{13}\cdot\left(\log_2 n\right)^{20}}$

הוכח לפי הגדרה 2 ש- $f(n)=\Omega(g(n))$

פתרון שאלה 2 מתרגיל 1

מאחר ו-

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{15n^3\cdot(\log_2 n)^3+25\sqrt[4]{n^{13}\cdot(\log_2 n)^{20}}}{(\sqrt{n})^3\cdot n^2\cdot(\log_2 n)^3}=0$$

אפשר לבחור כל קבוע c כך ש- $c>0$ למשל נבחר $c=1$. נחפש N_0 כך שעבור כל $n>N_0$ יתקיים:

$$f(n)\ge c\cdot g(n)$$

עבור $c=1$ ועבור הפונקציות f(n) ו- g(n) הנ"ל אי השוויון הנ"ל שקול ל-

$$(1)\quad (\sqrt{n})^3\cdot n^2\cdot(\log_2 n)^3\ge 15n^3\cdot(\log_2 n)^3+25\sqrt[4]{n^{13}\cdot(\log_2 n)^{20}}$$

אי השויון (1) נובע משני אי השויונות הבאים:

$$(2)\quad \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{n})^3\cdot n^2\cdot(\log_2 n)^3\ge 15n^3\cdot(\log_2 n)^3$$

$$(3)\quad \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{n})^3\cdot n^2\cdot(\log_2 n)^3\ge 25\sqrt[4]{n^{13}\cdot(\log_2 n)^{20}}$$

בשלב ראשון נראה שקיים N'_0 כך שעבור כל $n>N'_0$ מתקיים אי שוויון (2).
בשלב שני נראה שקיים N''_0 כך שעבור כל $n>N''_0$ מתקיים אי שוויון (3).

נבחר N_0 ששווה למקסימום בין N'_0 ו- N''_0 ונקבל שעבור כל $n>N_0$ מתקיימים גם אי שוויון (2) וגם אי שוויון (3) ולכן מתקיים אי שוויון (1) והוכחנו מה שרצינו.

נתאר עכשיו את השלב הראשון, נתחיל עם אי שוויון (2):

$$(2)\quad \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{n})^3\cdot n^2\cdot(\log_2 n)^3\ge 15n^3\cdot(\log_2 n)^3$$

ששקול ל-

$$n^{1/2}\ge 30$$

ששקול ל-

$n \geq 30^2$

לכן נבחר:

$N'_0 = 30^2$

וסימנו את השלב הראשון.

נתאר עכשיו את השלב השני, נתחיל עם אי שוויון (3):

$$(3) \quad \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{n})^3 \cdot n^2 \cdot (\log_2 n)^3 \geq 25 \sqrt[4]{n^{13} \cdot (\log_2 n)^{20}}$$

ששקול ל-

$n^{1/4} \geq 50 \cdot (\log_2 n)^2$

ששקול ל-

$$(4) \quad n \geq 50^4 \cdot (\log_2 n)^8$$

נציב:

$x = \log_2 n$

ששקול ל-

$n = 2^x$

נציב את שני השוויונות האחרונים באי שוויון (4) ונקבל:

$$(5) \quad 2^x \geq 50^4 \cdot x^8$$

ידוע שלכל x מתקיים:

$$(6) \quad 2^x \geq x$$

ולכן נקבל שלכל x מתקיים:

$$(7) \quad 2^x = 2^{(\frac{x}{9}+\frac{x}{9}+\cdots+\frac{x}{9})} \geq \frac{x}{9} \cdot \frac{x}{9} \cdots \frac{x}{9} = \frac{x^9}{9^9}$$

ולכן אם יתקיים אי השויון הבא:

$(8)\quad \frac{x^9}{9^9} \geq 50^4 \cdot x^8$

אזי מ- (8) ו- (7) נובע שמתקיים (5).

לכן נראה בהמשך ש- (8) מתקיים לכל $n>N''_0$.

אי השויון (8) שקול ל-

$(9)\quad x \geq 9^9 \cdot 50^4$

נציב חזרה $x=\log_2 n$ ונקבל:

$(10)\quad \log_2 n \geq 9^9 \cdot 50^4$

ששקול ל-

$(11)\quad n \geq 2^{9^9 \cdot 50^4}$

לכן נבחר:

$N_0'' = 2^{9^9 \cdot 50^4}$

לפתרון שאלות 3-5 נשתמש בתכונה הבאה של גבולות:

בחישובי גבולות אפשר להסתמך על הטענה הבאה:

אם קיים קבוע N_0 כך שלכל $n \geq N_0$ מתקיים: $f(n) \leq g(n)$

אזי: $\lim_{n\to\infty} f(n) \leq \lim_{n\to\infty} g(n)$

באותו אופן מתקיים:

אם קיים קבוע N_0 כך שלכל $n \geq N_0$ מתקיים: $f(n) \geq g(n)$

אזי: $\lim_{n\to\infty} f(n) \geq \lim_{n\to\infty} g(n)$

3. תהי $f(n)=\log_2(8n^2+2n+9)\cdot\log_2(n^5+20n^3)$

ותהי $g(n)=(\log_5(6n+100))^2$

הוכח לפי הגדרה 2 ש- $\mathbf{f(n)=\theta(g(n))}$

<u>פתרון שאלה 3 מתרגיל 1</u>

נפתור את השאלה בשני שלבים. בשלב ראשון נראה לפי הגדרה 2 ש- $f(n)=O(g(n))$ ובשלב השני נראה לפי הגדרה 2 ש- $f(n)=\Omega(g(n))$.

נתחיל עם השלב הראשון.

מאחר ו-

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2(8n^2+2n+9)\cdot\log_2(n^5+20n^3)}{(\log_5(6n+100))^2}\ \le$$

$$\le\ \lim_{n\to\infty}\frac{\log_2(8n^2+2n^2+9n^2)\cdot\log_2(n^5+20n^5)}{(\log_5 n)^2}\ =$$

$$=\ \lim_{n\to\infty}\frac{(2\log_2 n+\log_2 19)\cdot(5\log_2 n+\log_2 21)}{(\log_2 n/\log_2 5)^2}=10\cdot(\log_2 5)^2=53.91$$

לכן אפשר לבחור כל קבוע $c>53.91$ למשל נבחר $c=100$. נחפש N_0 כך שעבור כל $n>N_0$ יתקיים:

$$f(n)\le c\cdot g(n)$$

עבור $c=100$ ועבור הפונקציות $f(n)$ ו- $g(n)$ הנ"ל אי השוויון הנ"ל שקול ל-

$$(1)\quad \log_2(8n^2+2n+9)\cdot\log_2(n^5+20n^3)\le 100\cdot(\log_5(6n+100))^2$$

עבור כל $n\ge 1$ אי השויון (1) נובע מאי השוויון (2) הבא :

$$(2)\quad \log_2(8n^2+2n+9)\cdot\log_2(n^5+20n^3)\le 100\cdot(\log_5(n))^2$$

אי השויון (2) נובע מאי השוויון (3) הבא עבור כל עבור כל $n\ge 1$:

$$(3)\quad \log_2(19n^2)\cdot\log_2(21n^5)\le 100\cdot(\log_5(n))^2$$

ששקול ל-

$$(4)\quad (2\log_2 n+\log_2 19)\cdot(5\log_2 n+\log_2 21)\le 100\cdot(\log_2 n/\log_2 5)^2$$

עבור n שמקיים: $\log_2 n>\log_2 21$ ששקול ל- $n>21$ נקבל שאי שוויון (4) נובע מאי השוויון (5) הבא:

$$(5)\quad (2\log_2 n+\log_2 n)\cdot(5\log_2 n+\log_2 n)\le 100\cdot(\log_2 n/\log_2 5)^2$$

ששקול ל-

$$(6)\quad 3\log_2 n\cdot 6\log_2 n\le 100\cdot(\log_2 n/\log_2 5)^2$$

ששקול ל-

$$(7)\quad 18\le 18.54$$

מאחר והאי שוויון האחרון מתקיים תמיד ומאחר ובדרך הינו צריכים ש- n

יקיים $n > 21$ נבחר N_0=21 וסימנו את השלב הראשון.

נמשיך עם השלב השני.

מאחר ו-

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2(8n^2+2n+9)\cdot\log_2(n^5+20n^3)}{(\log_5(6n+100))^2} \geq$$

$$\geq \lim_{n\to\infty}\frac{2\log_2 n\cdot 5\log_2 n}{(\log_2 106n)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{10(\log_2 n)^2}{(\log_2 n+\log_2 106)^2}=10$$

לכן אפשר לבחור כל קבוע $c<10$ למשל נבחר c=1. נחפש N_0 כך שעבור כל $n>N_0$ יתקיים:

$$f(n)\geq c\cdot g(n)$$

עבור c=1 ועבור הפונקציות f(n) ו- g(n) הנ"ל אי השוויון הנ"ל שקול ל-

$$(1)\quad \log_2(8n^2+2n+9)\cdot\log_2(n^5+20n^3)>1\cdot(\log_5(6n+100))^2$$

לכל $n>100$ אי השויון (1) נובע מאי השוויון (2) הבא:

$$(2)\quad 2\log_2 n\cdot 5\log_2 n>1\cdot(\log_2(7n))^2$$

לכל $n>7$ אי השויון (2) נובע מאי השוויון (3) הבא:

$$(3)\quad 10(\log_2 n)^2>(\log_2(n^2))^2$$

ששקול ל-

$$(4)\quad 10(\log_2 n)^2>(2\log_2 n)^2$$

ששקול ל-

$$(5)\quad 10>4$$

מאחר והאי שוויון האחרון מתקיים תמיד ומאחר ובדרך הינו צריכים ש- n יקיים $n>100$ נבחר N_0=100 וסימנו את השלב השני.

4. תהי $f(n)=\log_5\left(4^{3n^2}+6n^{10}\right)$

ותהי $g(n)=\log_3\left(2^{n^3}+3^{n^7}\right)$

איזה מהיחסים הבאים מתקיימים:

f(n)=O(g(n))   f(n)=Ω(g(n))   f(n)=θ(g(n))

הוכח את תשובתך (ניתן להשתמש בהגדרה 1 או בהגדרה 2).

פתרון שאלה 4 מתרגיל 1

מאחר ו-

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_5\left(4^{3n^2}+6n^{10}\right)}{\log_3\left(2^{n^3}+3^{n^7}\right)}\le$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{\log_5\left(2\cdot4^{3n^2}\right)}{\log_3\left(2^{n^3}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_5 2+3n^2\log_5 4}{n^3\cdot\log_3 2}=0$$

מאחר והפונקציות חיוביות נקבל ש- 0 הוא הגבול הקטן ביותר האפשרי ולכן:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$$

ולכן f(n)=O(g(n))

מאחר ו-

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_3\left(2^{n^3}+3^{n^7}\right)}{\log_5\left(4^{3n^2}+6n^{10}\right)} \geq$$

$$\geq \lim_{n\to\infty}\frac{\log_3\left(2^{n^3}\right)}{\log_5\left(2\cdot 4^{3n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\cdot\log_3 2}{\log_5 2+3n^2\log_5 4}=\infty$$

לא מתקיים ש- $f(n)=\Omega(g(n))$ ולכן גם לא מתקיים ש- $f(n)=\theta(g(n))$

5. תהי $$f(n)=2^{2n^{4^{\log_2(n^2)}}}$$

ותהי $$g(n)=3^{n^{3^{3\log_3 n}}}$$

איזה מהיחסים הבאים מתקיים:

$f(n)=O(g(n))$ $f(n)=\Omega(g(n))$ $f(n)=\theta(g(n))$

הוכח את תשובתך (ניתן להשתמש בהגדרה 1 או בהגדרה 2).

<u>פתרון שאלה 5 מתרגיל 1</u>

נשים לב שכשמעלים בחזקות חשוב הסדר,
לדוגמה:

$$(2^3)^2 = 2^6 \neq 2^9 = 2^{(3^2)}$$

לכן בדוגמה הנ"ל נניח את סדר הפעולות הבא:

$$f(n) = 2^{\left(2n^{\left(4^{\log_2(n^2)}\right)}\right)} = 2^{\left(2n^{\left(4^{\log_4(n^2)/\log_4 2}\right)}\right)} = 2^{\left(2n^{\left((n^2)^{1/\log_4 2}\right)}\right)} = 2^{\left(2n^{(n^4)}\right)}$$

$$g(n) = 3^{\left(n^{\left(3^{(3\log_3 n)}\right)}\right)} = 3^{\left(n^{\left(3^{(\log_3 n^3)}\right)}\right)} = 3^{\left(n^{(n^3)}\right)}$$

מאחר ו-

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\left(2n^{(n^4)}\right)}}{3^{\left(n^{(n^3)}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{\left(n^{(n^4)}\right)}}{3^{\left(n^{(n^3)}\right)}} = \infty$$

ולכן f(n)=O(g(n)) לא מתקיים ולכן גם לא מתקיים ש- f(n)=θ(g(n))

מאחר ו-

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{\left(n^{(n^3)}\right)}}{2^{\left(2n^{(n^4)}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{\left(n^{(n^3)}\right)}}{4^{\left(n^{(n^4)}\right)}} = 0$$

מתקיים ש- f(n)=Ω(g(n)).