4.5.2016

מבני נתונים
פתרון תרגיל מס׳ 2

1. הוכח לפי הגדרה 2 ש-

$$\log_2 \log_2((4n)!) = \theta(\log n)$$

פתרון

נראה שקיימים קבועים חיוביים c_1 c_2 ו- N_0 כך שלכל $n \geq N_0$ מתקיימים שני אי השוויונות הבאים:

$$(1) \quad \log_2\log_2((4n)!) \leq c_2 \cdot \log n$$

$$(2) \quad \log_2\log_2((4n)!) \geq c_1 \cdot \log n$$

נראה שאי השוויון (1) מתקיים:

$$\log_2\log_2((4n)!) = \log_2\log_2(1\cdot 2\cdot 3\cdots 4n) \leq \log_2\log_2(4n\cdot 4n\cdot 4n\cdots 4n) =$$
$$= \log_2\log_2((4n)^{4n}) = \log_2(4n\cdot\log_2(4n))$$

לכן הראנו שמתקיים:

$$(3) \quad \log_2\log_2((4n)!) \leq \log_2(4n\cdot\log_2(4n))$$

עבור $n > 4$ מתקיים:

$$4n < n^2$$

ולכן עבור $n > 4$ מתקיים:

$$(4) \log_2(4n) < \log_2(n^2) = 2\cdot\log_2 n$$

ולכן מ- (3) ו- (4) נקבל שעבור $n > 4$ מתקיים:

$$(5) \quad \log_2\log_2((4n)!) \leq \log_2(4n\cdot 2\log_2 n) < \log_2(4n\cdot 2n) = \log_2(8n^2)$$

עבור $n > 8$ מתקיים:

$$8n^2 < n^3$$

ולכן עבור $n > 8$ מתקיים:

$$(6) \log_2(8n^2) < \log_2(n^3) = 3\cdot\log_2 n$$

ולכן מ- (5) ו- (6) נקבל שעבור $n > 8$ מתקיים:

$(7)\quad \log_2\log_2((4n)!)<\log_2(8n^2)<3\log_2 n$

מאי שוויון (7) נובע שאי שוויון (1) מתקיים עבור $c_2=3$
וכל $N_0>8$ לכן למשל נבחר $N_0=9$.
נראה שאי השוויון (2) מתקיים:

$$\begin{aligned}\log_2\log_2((4n)!) &= \log_2\log_2(4n\cdot(4n-1)\cdots 2n\cdot(2n-1)\cdots 1)\\ &\le \log_2\log_2(4n\cdot(4n-1)\cdots 2n)\le \log_2\log_2(2n\cdot 2n\cdots 2n)=\\ &= \log_2\log_2(2n^{2n})=\log_2 2n\log_2(2n)\ge \log_2 n\log_2 n\ge \log_2 n\end{aligned}$$

אי השוויון האחרון בנוסחה שלמעלה נובע מכך שלכל $n>2$
מתקיים: $\log_2 n>\log_2 2=1$ ולכן אם נכפיל את שני האגפים ב-
n נקבל: $n\log_2 n>n$ ואם נוציא לוג בבסיס 2 משני האגפים
נקבל:

$$\log_2(n\log_2 n)>\log_2 n$$

לכן הראנו שאי שוויון 2 מתקיים לכל $n>2$ ולכן נבחר
$c_1=1$ ו- $N_0=\max\{2,9\}=9$

.2

נתח את סיבוכיות זמן הריצה (במונחים של θ) של קטע הקוד הבא כתלות ב- **n**. נמק את תשובתך.

```
k=0
for (i=1; i ≤ n^6; i++) {
  for (j=3i ; j ≤ n^3; j++) {
    k++
  }
}
```

<u>פתרון</u>

נסמן ב- **x** את מספר הפעמים שנכנסים ללולאה הפנימית.

$$(1)\quad T(n)=C_1+C_2\cdot n^6+C_3\cdot x$$

נחשב את x.

עבור **i=1** נכנסים ללולאה הפנימית n^3-3+1 פעמים

עבור **i=2** נכנסים ללולאה הפנימית n^3-6+1 פעמים

עבור **i=3** נכנסים ללולאה הפנימית n^3-9+1 פעמים

...

עבור $i=\lfloor n^3/3\rfloor$ נכנסים ללולאה הפנימית $n^3-(3\cdot\lfloor n^3/3\rfloor)+1$ פעמים

עבור $i>\lfloor n^3/3\rfloor$ לא נכנסים ללולאה הפנימית

לכן:

$$\begin{aligned}x&=(n^3-3+1)+(n^3-6+1)+(n^3-9+1)+\ldots+(n^3-(3\cdot\lfloor n^3/3\rfloor)+1)=\\&=(n^3+1)\cdot\lfloor n^3/3\rfloor-3\cdot(1+2+3+\ldots+\lfloor n^3/3\rfloor)=\\&=(n^3+1)\cdot\lfloor n^3/3\rfloor-3/2\cdot\lfloor n^3/3\rfloor\cdot(\lfloor n^3/3\rfloor+1)\end{aligned}$$

נציב את x ב- (1) ונקבל:

$$T(n)=C_1+C_2\cdot n^6+C_3\cdot((n^3+1)\cdot\lfloor n^3/3\rfloor-3/2\cdot\lfloor n^3/3\rfloor\cdot(\lfloor n^3/3\rfloor+1))=\theta(n^6)$$

.3

נתח את סיבוכיות זמן הריצה (במונחים של θ) של קטע הקוד הבא כתלות ב- **n**. נמק את תשובתך.

```
k=0
for (i=1; i ≤ n^4; i++) {
 for (j=i^3 ; j ≤ 4n^2; j++) {
  k++
 }
}
```

<u>פתרון</u>

נסמן ב- **x** את מספר הפעמים שנכנסים ללולאה הפנימית.

$$(1)\quad T(n)=C_1+C_2\cdot n^4+C_3\cdot x$$

נחשב את x.

עבור $i=1$ נכנסים ללולאה הפנימית $4n^2-1^3+1$ פעמים

עבור $i=2$ נכנסים ללולאה הפנימית $4n^2-2^3+1$ פעמים

עבור $i=3$ נכנסים ללולאה הפנימית $4n^2-3^3+1$ פעמים

...

עבור $i=\lfloor\sqrt[3]{4n^2}\rfloor$ נכנסים ללולאה הפנימית $4n^2-(\lfloor\sqrt[3]{4n^2}\rfloor)^3+1$

עבור $i>i=\lfloor\sqrt[3]{4n^2}\rfloor$ לא נכנסים ללולאה הפנימית

לכן:

$$x=(4n^2-1^3+1)+(4n^2-2^3+1)+(4n^2-3^3+1)+\ldots+(4n^2-(\lfloor\sqrt[3]{4n^2}\rfloor)^3+1)=$$

$$=(4n^2+1)\cdot\lfloor\sqrt[3]{4n^2}\rfloor-(1^3+2^3+3^3+\ldots+(\lfloor\sqrt[3]{4n^2}\rfloor)^3)=$$

$$=(4n^2+1)\cdot\lfloor\sqrt[3]{4n^2}\rfloor-1/4\cdot(\lfloor\sqrt[3]{4n^2}\rfloor)^2\cdot(\lfloor\sqrt[3]{4n^2}\rfloor+1)^2$$

נציב את x ב- (1) ונקבל:

$$T(n)=C_1+C_2\cdot n^4+C_3\cdot((4n^2+1)\cdot\lfloor\sqrt[3]{4n^2}\rfloor-1/4\cdot(\lfloor\sqrt[3]{4n^2}\rfloor)^2\cdot(\lfloor\sqrt[3]{4n^2}\rfloor+1)^2)=\theta(n^4)$$

.4

נתח את סיבוכיות זמן הריצה (במונחים של θ) של קטע הקוד הבא כתלות ב- **n**. נמק את תשובתך.

```
k=0
for (i=1; i ≤ n^2; i++) {
 for (j=i^2; j ≤ 2i^3; j++) {
  k++
 }
}
```

<u>פתרון</u>

נסמן ב- **x** את מספר הפעמים שנכנסים ללולאה הפנימית.

$$(1)\quad T(n)=C_1+C_2\cdot n^2+C_3\cdot x$$

נחשב את x.

עבור **i=1** נכנסים ללולאה הפנימית $(2\cdot1^3-1^2+1)$ פעמים

עבור **i=2** נכנסים ללולאה הפנימית $(2\cdot2^3-2^2+1)$ פעמים

עבור **i=3** נכנסים ללולאה הפנימית $(2\cdot3^3-3^2+1)$ פעמים

...

עבור $i=n^2$ נכנסים ללולאה הפנימית $(2\cdot(n^2)^3-(n^2)^2+1)$ פעמים

עבור $i>n^2$ לא נכנסים ללולאה הפנימית

לכן:

$$x=(2\cdot1^3-1^2+1)+(2\cdot2^3-2^2+1)+(2\cdot3^3-3^2+1)+\ldots+(2\cdot(n^2)^3-(n^2)^2+1)=$$

$$=2\cdot(1^3+2^3+3^3+\ldots+(n^2)^3)-(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n^2)^2)+n^2=$$
$$=2\cdot1/4\cdot(n^2)^2\cdot(n^2+1)^2-1/6\cdot n^2\cdot(n^2+1)\cdot(2n^2+1)+n^2$$

נציב את x ב- (1) ונקבל:

$$T(n)=C_1+C_2\cdot n^2+C_3\cdot(2\cdot1/4\cdot(n^2)^2\cdot(n^2+1)^2-1/6\cdot n^2\cdot(n^2+1)\cdot(2n^2+1)+n^2)=\theta(n^8)$$

.5

נתח את סיבוכיות זמן הריצה (במונחים של θ) של קטע הקוד הבא כתלות ב- **n**. נמק את תשובתך.

```
i=1
s=0
for (i=1; i ≤ 2n^4; i=i·3) {
   for (j=i^2 ; j ≤ n^2; j++) {
     s++
  }
}
```

<u>פתרון</u>

שימו לב שבפתרונות שראיתי היתה שגיאה שהבודק לא סימן, כך שמומלץ גם למי שקיבל את כל הנקודות על התרגיל הזה, לעבור על הפתרון שלהלן כדי לבדוק שהפתרון שלו נכון.

(השגיאה שראיתי היתה שלא חושב נכון מספר הפעמים שנכנסים ללולאה הפנימית).

נסמן ב- **x** את מספר הפעמים שנכנסים ללולאה החיצונית.

נסמן ב- **y** את מספר הפעמים שנכנסים ללולאה הפנימית.

$$(1) \quad T(n)=C_1+C_2x+C_3y$$

נחשב את x.

נסמן ב- i_k את הערך של **i** אחרי **k** כניסות ללולאה החיצונית בסוף הלולאה.

נקבל ש- $i_1=3 \quad i_2=3^2 \quad i_3=3^3 \ldots i_k=3^k$

לפי הסימון הנ"ל i_x מציין את הערך של **i** לאחר **x** כניסות ללולאה בסוף הלולאה.

מאחר ולא נכנסים x+1 פעמים ללולאה מתקיים:

$$i_x>2n^4$$

ששקול ל-

$$3^x>2n^4$$

ששקול ל-

$$(2) \quad x>\log_3 2n^4$$

מאחר נכנסים x פעמים ללולאה מתקיים:

$i_{x-1} \le 2n^4$

ששקול ל-

$3^{x-1} \le 2n^4$

ששקול ל-

$x - 1 \le \log_3 2n^4$

ששקול ל-

$(3) \quad x \le 1 + \log_3 2n^4$

מ- (2) ו- (3) נובע ש-

$(4) \quad x = 1 + \lfloor \log_3 2n^4 \rfloor$

נחשב את y.

לחישוב y נמצא את הערך האחרון של i שאיתו נכנסים ללולאה הפנימית.

הערכים ש- i מקבל שאיתם נכנסים ללולאה הפנימית הם:

$i = 1 \quad i = 3 \quad i = 3^2 \ldots i = 3^z$

כאשר z הוא מספר שלם ו- $i = 3^z$ הוא הערך האחרון של i שאיתו נכנסים ללולאה הפנימית. כדי שעבור ערך זה של i תהיה כניסה ללולאה הפנימית חייב להתקיים:

$(3^z)^2 \le n^2$

ששקול ל-

$3^z \le n$

ששקול ל-

$z \le \log_3 n$

מאחר ו- z הוא מספר שלם מאי השוויון הנ"ל נובע שמתקיים:

$z = \lfloor \log_3 n \rfloor$

לכן הערך האחרון של i שאיתו נכנסים ללולאה הפנימית הוא:

$i=3^{\lfloor \log_3 n \rfloor}$

עבור $i=1$ נכנסים ללולאה הפנימית (n^2-1^2+1) פעמים

עבור $i=3$ נכנסים ללולאה הפנימית (n^2-3^2+1) פעמים

עבור $i=3^2$ נכנסים ללולאה הפנימית $(n^2-(3^2)^2+1)$ פעמים

עבור $i=3^3$ נכנסים ללולאה הפנימית $(n^2-(3^3)^2+1)$ פעמים

...

עבור $i=3^{\lfloor \log_3 n \rfloor}$ נכנסים ללולאה הפנימית $(n^2-(3^{\lfloor \log_3 n \rfloor})^2+1)$

עבור $i>3^{\lfloor \log_3 n \rfloor}$ לא נכנסים ללולאה הפנימית

לכן:

$$y=(n^2-1^2+1)+(n^2-3^2+1)+(n^2-(3^2)^2+1)+(n^2-(3^3)^2+1)+\ldots+(n^2-(3^{\lfloor \log_3 n \rfloor})^2+1)=$$

$$=(n^2+1)\cdot\lfloor 2\log_3 n \rfloor-(1^2+3^2+(3^2)^2+(3^3)^2+\ldots+(3^{\lfloor \log_3 n \rfloor})^2)=$$
$$=(n^2+1)\cdot\lfloor 2\log_3 n \rfloor-(1^2+3^2+(3^2)^2+(3^2)^3+\ldots+(3^2)^{\lfloor \log_3 n \rfloor})=$$
$$=(n^2+1)\cdot\lfloor 2\log_3 n \rfloor-1/(3^2-1)\cdot((3^2)^{\lfloor \log_3 n \rfloor+1}-1)=$$
$$=(n^2+1)\cdot\lfloor 2\log_3 n \rfloor-1/8\cdot((3^2)^{\lfloor \log_3 n \rfloor+1}-1)$$

נציב את x ו- y ב- (1) ונקבל:

$$T(n)=C_1+C_2\cdot(1+\lfloor \log_3 2n^4 \rfloor)+C_3\cdot((n^2+1)\cdot\lfloor \log_3 n \rfloor-1/8\cdot((3^2)^{\lfloor \log_3 n \rfloor+1}-1))=\theta(n^2\cdot\log n)$$

.6

נתח את סיבוכיות זמן הריצה (במונחים של θ) של קטע הקוד הבא כתלות ב- **n**. נמק את תשובתך.

```
x = 0
for (i = 1; i ≤ n^4; i++) {
 for (j = 2i; j ≤ n^2; j++) {
  x=x+1
 }
}
z=1
y=0
while (z ≤ 2^(2^(x+2)))  {
  z = z * 2
   t=0
   for (i=1;i≤ x^2; i++) {
     t++
   }
}
```

<u>פתרון</u>

הערך השל המשתנה **x** שווה למספר הפעמים שנכנסים ללולאת ה- for הפנימית שבקטע הקוד הראשון.

נסמן ב- t את מספר הפעמים שנכנסים ללולאת ה- while
ונסמן ב- s את מספר הפעמים שנכנסים ללולאת ה- for שבתוך לולאת ה- while.

$$(1) \quad T(n)=C_1+C_2\cdot n^4+C_3\cdot x+C_4\cdot t+C_5\cdot s$$

נחשב את x. ה- i האחרון שאיתו נכנסים ללולאת ה- for הפנימית שבקטע הקוד הראשון חייב לקיים:

$$2i\le n^2$$

ששקול ל-

$$i\le n^2/2$$

מאחר ו- i מספר שלם נקבל שה- i האחרון הוא: $i=\lfloor n^2/2\rfloor$

עבור $i=1$ נכנסים ללולאה הפנימית $(n^2-2\cdot 1+1)$ פעמים

עבור $i=2$ נכנסים ללולאה הפנימית $(n^2-2\cdot 2+1)$ פעמים

עבור $i=3$ נכנסים ללולאה הפנימית $(n^2-2\cdot3+1)$ פעמים

...

עבור $i=\lfloor n^2/2\rfloor$ נכנסים ללולאה הפנימית $(n^2-2\cdot\lfloor n^2/2\rfloor+1)$

עבור $i>\lfloor n^2/2\rfloor$ לא נכנסים ללולאה הפנימית

לכן:

$$x=(n^2-2\cdot1+1)+(n^2-2\cdot2+1)+(n^2-2\cdot3+1)+\ldots+(n^2-2\cdot\lfloor n^2/2\rfloor+1)=$$

$$=(n^2+1)\cdot\lfloor n^2/2\rfloor-2\cdot(1+2+3+\ldots+\lfloor n^2/2\rfloor)=$$
$$=(n^2+1)\cdot\lfloor n^2/2\rfloor-\lfloor n^2/2\rfloor\cdot(\lfloor n^2/2\rfloor+1)=$$
$$=\lfloor n^2/2\rfloor\cdot(n^2-\lfloor n^2/2\rfloor)$$

נחשב את t.

נסמן ב- z_k את הערך של z אחרי k כניסות ללולאה החיצונית בסוף הלולאה.

נקבל ש- $z_1=2\ \ z_2=2^2\ \ z_3=2^3\ldots z_k=2^k$

מאחר ולא נכנסים t+1 פעמים ללולאה מתקיים:

$$z_t>2^{2^{x+2}}$$

ששקול ל-

$$2^t>2^{2^{x+2}}$$

ששקול ל-

$$(2)\quad t>2^{x+2}$$

מאחר נכנסים t פעמים ללולאה מתקיים:

$$z_{t-1}\le 2^{2^{x+2}}$$

ששקול ל-

$$2^{t-1}\le 2^{2^{x+2}}$$

ששקול ל-

$$t-1\le 2^{x+2}$$

ששקול ל-

$$(3)\quad t \le 1+2^{x+2}$$

מ- (2) ו- (3) ומכך ש- x ו- t הם מספרים שלמים נובע ש

$$(4)\quad t = 1+2^{x+2}$$

נחשב את s.

מאחר ובכל כניסה ללולאת ה- while נכנסים x^2 פעמים ללולאת ה- for נקבל ש-

$$s = t\cdot x^2 = (1+2^{x+2})\cdot x^2 = x^2 + x^2\cdot 2^{x+2}$$

נציב את הערכים של x t s שחישבנו ב- (1) ונקבל:

$$T(n) = C_1 + C_2\cdot n^4 + C_3\cdot(\lfloor n^2/2\rfloor\cdot(n^2-\lfloor n^2/2\rfloor)) + C_4\cdot(1+2^{(\lfloor n^2/2\rfloor\cdot(n^2-\lfloor n^2/2\rfloor))+2}) + $$
$$+ C_5\cdot(\lfloor n^2/2\rfloor\cdot(n^2-\lfloor n^2/2\rfloor))^2 + (\lfloor n^2/2\rfloor\cdot(n^2-\lfloor n^2/2\rfloor))^2\cdot 2^{(\lfloor n^2/2\rfloor\cdot(n^2-\lfloor n^2/2\rfloor))+2} =$$

$$= \theta\left(n^8\cdot 2^{\lfloor n^2/2\rfloor\cdot(n^2-\lfloor n^2/2\rfloor)}\right)$$

שימו לב במקרה הזה שבהערכה של θ אי אפשר להתעלם אפילו מהערך השלם התחתון ויש להשאיר אותו בנוסחה בגלל שהוא מופיע בחזקה. למשל אם נתעלם ממנו, זאת אומרת שטעינו בהערכה שלו ב-1, אז בגלל שהוא בחזקה וכופל משהו שתלוי ב- n יש לזה השפעה.