11.5.2016

מבני נתונים
פתרון תרגיל מס׳ 3

.1

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם **P1(n,m)** שמקבלת כפרמטרים מספרים **n** ו- **m**. הפונקציה קוראת לפונקצית עזר בשם **F(x)** שמקבלת כפרמטר מספר **x** ומתוארת בהמשך . נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה **P1(n,m)** כתלות ב- **n** ו- **m** (במונחים של ה- **O** הקטן ביותר שאתה/את יודע/ת להשיג).

```
P1(n,m)
-------
x=0
for (i = 1; i ≤ n²; i++) {
  for (j = i; j ≤ 2m; j++) {
     x=x+F(i)
  }
}
return x
```

```
F(x)
-------
s=0
for (i = 1; i ≤  2^(x²) ; i=i*2)
   {
      s++
   }
return s
```

הדרכה:

1. יש לפרק לשני מקרים: $n^2 \le 2m$ ו- $n^2 > 2m$.

2. כאשר רוצים לחשב סכום טור שאינו מופיע בנוסחאות הידועות שרשומות בתחילת החוברת, אפשר לרשום אותו כסכום/חיסור של שני טורים שסכומם ידוע. לדוגמה בחישוב הטור:

$1\cdot 3+2\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+2)$

אפשר לשים לב שהאיבר ה- i של הטור הוא $i\cdot(i+2)$ ששווה ל- i^2+2i ולכן סכום הטור הנ"ל מתקבל כסכום של שני הטורים הבאים:

$1^2+2^2+\ldots+n^2$

$2(1+2+3\ldots+n)$

<u>**פתרון**</u>

נסמן ב- $T_F(x)$ את זמן ביצוע הפונקציה F(x) כתלות בפרמטר x.

נסמן ב- y את מספר הפעמים שנכנסים ללולאת ה- for שבפונקציה F(x).

$$(1)\quad T_F(x)=C_1+C_2\cdot y$$

נחשב את y.

נסמן ב- i_k את הערך של i אחרי k כניסות ללולאה החיצונית בסוף הלולאה.

נקבל ש- $i_1=2\quad i_2=2^2\quad i_3=2^3\ldots i_k=2^k$

מאחר ולא נכנסים y+1 פעמים ללולאה מתקיים:

$$i_y>2^{x^2}$$

ששקול ל-

$$2^y>2^{x^2}$$

ששקול ל-

$$(2)\quad y>x^2$$

מאחר ונכנסים y פעמים ללולאה מתקיים:

$$i_{y-1}\le 2^{x^2}$$

ששקול ל-

$$2^{y-1}\le 2^{x^2}$$

ששקול ל-

$$y-1\le x^2$$

ששקול ל-

$$(3)\quad y \le 1 + x^2$$

מ- (2) ו- (3) ומכך ש- y מספר שלם נובע ש-

$$(4)\quad y = \lfloor 1 + x^2 \rfloor$$

נציב את y ב- (1) ונקבל:

$$T_F(x) = C_1 + C_2 \cdot \lfloor 1 + x^2 \rfloor = \theta(x^2)$$

לכן לפי הגדרת θ קימים קבועים D_1 D_2 ו- N_0 כך שלכל $x \ge N_0$ מתקיימים שני האי שוויונות הבאים:

$$(5)\quad T_F(x) \le D_2 \cdot x^2$$

$$(6)\quad T_F(x) \ge D_1 \cdot x^2$$

נסמן ב- T(n,m) את זמן ביצוע הפונקציה P1(n,m) כתלות בפרמטרים n ו- m. נסמן ב- A את סך כל זמן הביצוע של פונקצית העזר. נבחין בין שני מקרים:

<u>מקרה 1:</u> $n^2 \le 2m$

במקרה זה הערכים של i שאיתם נכנסים ללולאת ה- for הפנימית הם: $i=1, i=2, i=3, \dots, i=n^2$

עבור $i=1$ נכנסים ללולאה הפנימית $2m$ פעמים

עבור $i=2$ נכנסים ללולאה הפנימית פעמים $2m-1$

עבור $i=3$ נכנסים ללולאה הפנימית $2m-2$ פעמים

...

עבור $i=n^2$ נכנסים ללולאה הפנימית $2m-n^2+1$

לכן:

$$T(n,m) = C_1 + C_2 \cdot n^2 + C_3 \cdot (2m + (2m-1) + (2m-2) + \dots + (2m-n^2+1)) + A =$$

$$= C_1 + C_2 \cdot n^2 + C_3 \cdot ((2m \cdot n^2) - (1+2+3+\dots+n^2-1)) + A =$$

$$= C_1 + C_2 \cdot n^2 + C_3 \cdot (2m \cdot n^2 - 1/2 \cdot (n^2-1) \cdot n^2) + A$$

לסיכום, קיבלנו עד עכשיו ש-

$$(7)\quad T(n,m)=C_1+C_2\cdot n^2+C_3\cdot(2m\cdot n^2-1/2\cdot(n^2-1)\cdot n^2)+A$$

נחשב את A

עבור $i=1$ קוראים לפונקציה $F(1)$ $2m$ פעמים

עבור $i=2$ קוראים לפונקציה $F(2)$ $2m-1$ פעמים

עבור $i=3$ קוראים לפונקציה $F(3)$ $2m-2$ פעמים

...

עבור $i=n^2$ קוראים לפונקציה $F(n^2)$ $2m-n^2+1$ פעמים

לכן:

$$A=2m\cdot T_F(1)+(2m-1)\cdot T_F(2)+(2m-2)\cdot T_F(3)+\ldots+(2m-n^2+1)\cdot T_F(n^2)$$

נציב בשוויון הנ"ל את אי שוויון (5) ונקבל:

$$\begin{aligned}A&\le 2m\cdot D_2\cdot 1^2+(2m-1)\cdot D_2\cdot 2^2+(2m-2)\cdot D_2\cdot 3^2+\ldots+(2m-n^2+1)\cdot D_2\cdot(n^2)^2=\\&=D_2\cdot(2m\cdot(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n^2)^2)-(1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots+(n^2-1)\cdot(n^2)^2))=\\&=D_2\cdot(2m\cdot 1/6\cdot n^2\cdot(n^2+1)\cdot(2n^2+1)-((2-1)\cdot 2^2+(3-1)\cdot 3^2+\ldots+(n^2-1)\cdot(n^2)^2))=\\&=D_2\cdot(m\cdot 1/3\cdot n^2\cdot(n^2+1)\cdot(2n^2+1)-((2^3+3^3+\ldots+(n^2)^3)-(2^2+3^2+\ldots+(n^2)^2)))=\\&=D_2\cdot(m\cdot 1/3\cdot n^2\cdot(n^2+1)\cdot(2n^2+1)-((1/4\cdot(n^2)^2\cdot((n^2)+1)^2-1)-(1/6\cdot(n^2)\cdot(n^2)+1)\cdot(2n^2+1)))\end{aligned}$$

לסיכום נקבל:

$$A\le D_2\cdot(m\cdot 1/3\cdot n^2\cdot(n^2+1)\cdot(2n^2+1)-((1/4\cdot(n^2)^2\cdot((n^2)+1)^2-1)-(1/6\cdot(n^2)\cdot(n^2)+1)\cdot(2n^2+1)))$$

נציב את אי השוויון הנ"ל ב- (7) ונקבל:

$$\begin{aligned}&T(n,m)\le C_1+C_2\cdot n^2+C_3\cdot(2m\cdot n^2-1/2\cdot(n^2-1)\cdot n^2)+\\&+D_2\cdot(m\cdot 1/3\cdot n^2\cdot(n^2+1)\cdot(2n^2+1)-((1/4\cdot(n^2)^2\cdot((n^2)+1)^2-1)-(1/6\cdot(n^2)\cdot(n^2)+1)\cdot(2n^2+1)))=\\&=\theta(m\cdot n^6)\end{aligned}$$

לסיכום במקרה 1 נקבל:

$$T(n,m)=O(m\cdot n^6)$$

<u>מקרה 2:</u> $n^2>2m$

במקרה זה הערכים של i שאיתם נכנסים ללולאת ה- for הפנימית הם: $i=1, i=2, i=3, \ldots, i=2m$

עבור $i=1$ נכנסים ללולאה הפנימית $2m$ פעמים

עבור $i=2$ נכנסים ללולאה הפנימית פעמים $2m-1$

עבור $i=3$ נכנסים ללולאה הפנימית $2m-2$ פעמים

...
עבור $i=2m$ נכנסים ללולאה הפנימית 1 פעמים.

לכן:

$$T(n,m)=C_1+C_2\cdot n^2+C_3\cdot(2m+(2m-1)+(2m-2)+\ldots+1)+A=$$

$$=C_1+C_2\cdot n^2+C_3\cdot(1/2\cdot 2m\cdot(2m+1))+A=$$

$$=C_1+C_2\cdot n^2+C_3\cdot m\cdot(2m+1)+A$$

לסיכום, קיבלנו עד עכשיו ש-

$$(8)\quad T(n,m)=C_1+C_2\cdot n^2+C_3\cdot m\cdot(2m+1)+A$$

נחשב את A

עבור $i=1$ קוראים לפונקציה $F(1)$ $2m$ פעמים

עבור $i=2$ קוראים לפונקציה $F(2)$ $2m-1$ פעמים

עבור $i=3$ קוראים לפונקציה $F(3)$ $2m-2$ פעמים

...
עבור $i=2m$ קוראים לפונקציה $F(2m)$ 1 פעמים

לכן:

$$A=2m\cdot T_F(1)+(2m-1)\cdot T_F(2)+(2m-2)\cdot T_F(3)+\ldots+1\cdot T_F(2m)$$

נציב בשוויון הנ"ל את אי שוויון (5) ונקבל:

$$A\le 2m\cdot 1^2+(2m-1)\cdot 2^2+(2m-2)\cdot 3^2+\ldots+1\cdot(2m)^2=$$

$$=2m\cdot 1^2+(2m-1)\cdot 2^2+(2m-2)\cdot 3^2+\ldots+(2m-(2m-1))\cdot(2m)^2=$$

$$=2m\cdot(1^2+2^2+3^2+\ldots+(2m)^2)-(1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots+(2m-1)\cdot(2m)^2)=$$

$$=2m\cdot 1/6\cdot 2m\cdot(2m+1)\cdot(4m+1)-((2-1)\cdot 2^2+(3-1)\cdot 3^2+\ldots+(2m-1)\cdot(2m)^2)=$$

$$=(2m^2/3)\cdot(2m+1)\cdot(4m+1)-((2^3+3^3+\ldots+(2m)^3)-(2^2+3^2+\ldots(2m)^2))=$$

$$=(2m^2/3)\cdot(2m+1)\cdot(4m+1)-((2^3+3^3+\ldots+(2m)^3)-(2^2+3^2+\ldots(2m)^2))=$$

$$=(2m^2/3)\cdot(2m+1)\cdot(4m+1)-((1/4\cdot(2m)^2\cdot(2m+1)^2-1)-(1/6\cdot 2m\cdot(2m+1)\cdot(4m+1)-1))$$

לסיכום נקבל:

$$A\le(2m^2/3)\cdot(2m+1)\cdot(4m+1)-((1/4\cdot(2m)^2\cdot(2m+1)^2-1)-(1/6\cdot 2m\cdot(2m+1)\cdot(4m+1)-1))$$

נציב את אי השוויון הנ"ל ב- (8) ונקבל:

$$T(n,m)\le C_1+C_2\cdot n^2+C_3\cdot m\cdot(2m+1)+$$

$$+(2m^2/3)\cdot(2m+1)\cdot(4m+1)-((1/4\cdot(2m)^2\cdot(2m+1)^2-1)-(1/6\cdot 2m\cdot(2m+1)\cdot(4m+1)-1))=$$

$$=\theta(n^2+m^4)$$

לסיכום במקרה 2 נקבל:

$$T(n,m)=O(n^2+m^4)$$

.2

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם P2(n,m) שמקבלת כפרמטרים מספרים n ו- m.
הפונקציה קוראת לפונקצית עזר בשם F(x) שמקבלת כפרמטר מספר x ומתוארת בהמשך . נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה P1(n,m) כתלות ב- n ו- m (במונחים של ה- O הקטן ביותר שאתה/את יודע/ת להשיג).

```
P2(n,m)
-------
x=0
for (i = 1; i ≤ n; i++) {
  for (j = i; j ≤ n+m; j++) {
      x=x+F(i) · F(j)
  }
}
return x


F(m)
-------
s=0
for (i = 1; i ≤ 2^(m+2); i++)
   {
   for (j = 1; j ≤ 2^(2m); j=j*2)
     {
         s++
     }
   }
return s
```

__הדרכה:__

לצורך הפתרון ניתן להשתמש בעובדה הבאה עבור הטור הבא:

$$1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^n=\theta\left(n\cdot 2^n\right)$$

שימו לב שהטור הנ"ל אינו בדיוק הטור שצריך לחשב בשאלה, אך ניתן להיעזר בו לחישוב הטור שנדרש בשאלה.

פתרון

נסמן ב- $T_F(m)$ את זמן ביצוע הפונקציה $F(m)$ כתלות בפרמטר m.

נסמן ב- y את מספר הפעמים שנכנסים ללולאת ה- for הפנימית שבפונקציה F(x).

$$(1) \quad T_F(m) = C_1 + C_2 \cdot 2^{m+2} + C_3 \cdot y$$

נחשב את y.

נסמן ב- z את מספר הפעמים שנכנסים ללולאה הפנימית עבור כל כניסה ללולאה החיצונית.

$$(2) \quad y = 2^{m+2} \cdot z$$

נחשב את z.

נסמן ב- j_k את הערך של j אחרי k כניסות ללולאה הפנימית בסוף הלולאה.

נקבל ש- $j_1 = 2 \quad j_2 = 2^2 \quad j_3 = 2^3 \ldots j_k = 2^k$

מאחר ולא נכנסים z+1 פעמים ללולאה הפנימית (עבור כניסה אחת ללולאה החיצונית) מתקיים:

$$j_z > 2^{2m}$$

ששקול ל-

$$2^z > 2^{2m}$$

ששקול ל-

$$(3) \quad z > 2m$$

מאחר ונכנסים z פעמים ללולאה הפנימית (עבור כניסה אחת ללולאה החיצונית מתקיים:

$$j_{z-1} \leq 2^{2m}$$

ששקול ל-

$$2^{z-1} \leq 2^{2m}$$

ששקול ל-

$$z-1\leq 2m$$

ששקול ל-

$$(4)\quad z\leq 1+2m$$

מ- (3) ו- (4) ומכך ש- z מספר שלם נובע ש-

$$(5)\quad z=\lfloor 1+2m\rfloor$$

נציב את z ב- (2) ונקבל:

$$(6)\quad y=2^{m+2}\cdot\lfloor 1+2m\rfloor$$

נציב את y ב- (1) ונקבל:

$$T_F(m)=C_1+C_2\cdot 2^{m+2}+C_3\cdot 2^{m+2}\cdot\lfloor 1+2m\rfloor=\theta(m\cdot 2^m)$$

לכן לפי הגדרת θ קימים קבועים D_1 D_2 ו- N_0 כך שלכל $m\geq N_0$ מתקיימים שני האי שוויונות הבאים:

$$(7)\quad T_F(m)\leq D_2\cdot m\cdot 2^m$$

$$(8)\quad T_F(m)\geq D_1\cdot m\cdot 2^m$$

נסמן ב- T(n,m) את זמן ביצוע הפונקציה P1(n,m) כתלות בפרמטרים n ו- m. נסמן ב- A את סך כל זמן הביצוע של פונקצית העזר.

הערכים של i שאיתם נכנסים ללולאת ה- for הפנימית הם: $i=1, i=2, i=3, \dots, i=n$

עבור $i=1$ נכנסים ללולאה הפנימית $n+m$ פעמים

עבור $i=2$ נכנסים ללולאה הפנימית פעמים $n+m-1$

עבור $i=3$ נכנסים ללולאה הפנימית $n+m-2$ פעמים

...

עבור $i=n$ נכנסים ללולאה הפנימית $m+1$ פעמים

לכן:

$$T(n,m)=C_1+C_2\cdot n+C_3\cdot((n+m)+(n+m-1)+(n+m-2)+\dots+(n+m-n+1))+A=$$
$$=C_1+C_2\cdot n+C_3\cdot((n+m)\cdot n-(1+2+\dots+(n-1)))+A=$$
$$=C_1+C_2\cdot n+C_3\cdot((n+m)\cdot n-1/2\cdot(n-1)\cdot n)+A$$

לסיכום, קיבלנו עד עכשיו ש-

$$(9)\quad T(n,m)=C_1+C_2\cdot n+C_3\cdot((n+m)\cdot n-1/2\cdot(n-1)\cdot n)+A$$

נחשב את A

עבור $i=1$:

עבור $j=1$ קוראים לפונקציה $F(1)$ ולפונקציה $F(1)$
עבור $j=2$ קוראים לפונקציה $F(1)$ ולפונקציה $F(2)$
...
עבור $j=n+m$ קוראים לפונקציה $F(1)$ ולפונקציה $F(n+m)$

עבור $i=2$:

עבור $j=2$ קוראים לפונקציה $F(2)$ ולפונקציה $F(2)$
עבור $j=3$ קוראים לפונקציה $F(2)$ ולפונקציה $F(3)$
...
עבור $j=n+m$ קוראים לפונקציה $F(2)$ ולפונקציה $F(n+m)$

...

עבור $i=n$:

עבור $j=n$ קוראים לפונקציה $F(n)$ ולפונקציה $F(n)$
עבור $j=n+1$ קוראים לפונקציה $F(n)$ ולפונקציה $F(n+1)$
...
עבור $j=n+m$ קוראים לפונקציה $F(n)$ ולפונקציה $F(n+m)$

לכן:

$$A=(n+m)\cdot T_F(1)+(n+m-1)\cdot T_F(2)+\ldots+(m+1)\cdot T_F(n)+$$
$$+1\cdot T_F(1)+2\cdot T_F(2)+\ldots+n\cdot T_F(n)+n\cdot(T_F(n+1)+T_F(n+2)+\ldots+T_F(n+m))=$$

$$=(n+m+1)\cdot T_F(1)+(n+m+1)\cdot T_F(2)+\ldots+(n+m+1)\cdot T_F(n)+$$
$$+n\cdot(T_F(n+1)+T_F(n+2)+\ldots+T_F(n+m))=$$

$$=(n+m+1)\cdot(T_F(1)+T_F(2)+\ldots+T_F(n))+n\cdot(T_F(n+1)+T_F(n+2)+\ldots+T_F(n+m))$$

לסיכום נקבל:

$$A=(n+m+1)\cdot(T_F(1)+T_F(2)+\ldots+T_F(n))+n\cdot(T_F(n+1)+T_F(n+2)+\ldots+T_F(n+m))$$

נציב בשוויון הנ"ל את אי שוויון (7) ונקבל:

$$A \le D_2\cdot\left((n+m+1)\cdot(1\cdot2^1+2\cdot2^2+\ldots+n\cdot2^n)+n\cdot\left((n+1)\cdot2^{n+1}+(n+2)\cdot2^{n+2}+\ldots+(n+m)\cdot2^{n+m}\right)\right)=$$
$$=D_2\cdot\left((n+m+1)\cdot(1\cdot2^1+2\cdot2^2+\ldots+n\cdot2^n)+\right.$$
$$\left.+n\cdot\left(n\cdot2^n\cdot(2^1+2^2+\ldots+2^m)+2^n\cdot(1\cdot2^1+2\cdot2^2+\ldots+m\cdot2^m)\right)\right)=$$
$$=D_2\cdot\left((n+m+1)\cdot(1\cdot2^1+2\cdot2^2+\ldots+n\cdot2^n)+n^2\cdot2^n\cdot(2^{m+1}-2)+n\cdot2^n\cdot(1\cdot2^1+2\cdot2^2+\ldots+m\cdot2^m)\right)$$

לסיכום נקבל:

$$A \le D_2\cdot\left((n+m+1)\cdot(1\cdot2^1+2\cdot2^2+\ldots+n\cdot2^n)+n^2\cdot2^n\cdot(2^{m+1}-2)+n\cdot2^n\cdot(1\cdot2^1+2\cdot2^2+\ldots+m\cdot2^m)\right)$$

נציב את אי השויון האחרון בשויון (9) ונקבל:

$$T(n,m)\le C_1+C_2\cdot n+C_3\cdot\left((n+m)\cdot n-1/2\cdot(n-1)\cdot n\right)+$$

$$+D_2\cdot\left((n+m+1)\cdot(1\cdot2^1+2\cdot2^2+\ldots+n\cdot2^n)+n^2\cdot2^n\cdot(2^{m+1}-2)+n\cdot2^n\cdot(1\cdot2^1+2\cdot2^2+\ldots+m\cdot2^m)\right)$$

$$=\theta\left(2^{n+m}\cdot(n^2+n\cdot m)\right)$$

לסיכום נקבל:

$$T(n,m)=O\left(2^{n+m}\cdot(n^2+n\cdot m)\right)$$

.3

הוכח ש-

$$1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^n=\theta(n\cdot 2^n)$$

הדרכה:

נסמן ב- s(n) את סכום n האיברים הראשונים בטור הנ"ל ונשים לב שמתקיים:

$$\begin{aligned} s(n)&=1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^n \\ &=1\cdot 2^1+(1+1)\cdot 2^2+(1+2)\cdot 2^3+\ldots+(1+(n-1))\cdot 2^n \\ &=2^1+2^2+2^3+\ldots 2^n+2(1\cdot 2^2+2\cdot 2^2+\ldots+(n-1)2^{n-1}) \\ &=2^{n+1}-2+2(s(n-1)) \end{aligned}$$

כעת נמשיך בשיטת ההצבה ונראה בעזרת הנוסחה הנ"ל שמתקיים:

$$\mathbf{s}(\mathbf{n})=\theta(\mathbf{n}\cdot\mathbf{2}^{\mathbf{n}})$$

כדי להוכיח θ נוכיח O ו- Ω . כדי להוכיח O נתחיל עם הנוסחה היותר פשוטה הבאה שנובעת מהנוסחה הנ"ל ונמשיך בשיטת ההצבה.

$$s(n)\le 2(s(n-1))+2^{n+1}$$

פתרון

נסמן ב- $\mathbf{s}(\mathbf{n})$ את סכום הטור ונמשיך עם הנוסחה הבאה שהתקבלה מההדרכה של השאלה:

$$(1)\ \ s(n)\le 2\cdot s(n-1)+2^{n+1}$$

נציב n=n-1 בשוויון (1) ונקבל:

$$(2)\ \ s(n-1)\le 2\cdot s(n-2)+2^{n}$$

נציב את (2) ב- (1) ונקבל:

$$(3)\ \ s(n)\le 2(2(s(n-2))+2^n)+2^{n+1}$$

ששקול ל-

(4) $s(n) \le 2^2 \cdot s(n-2) + 2 \cdot 2^{n+1}$

נציב n=n-2 בשוויון (1) ונקבל:

(5) $s(n-2) \le 2 \cdot s(n-3) + 2^{n-1}$

נציב את (5) ב- (4) ונקבל:

(6) $s(n) \le 2^2 \cdot (2 \cdot s(n-3) + 2^{n-1}) + 2 \cdot 2^{n+1}$

ששקול ל-

(7) $s(n) \le 2^3 \cdot s(n-3) + 3 \cdot 2^{n+1}$

ולכן נקבל שלכל i שלם וקטן מ- n מתקיים:

(8) $s(n) \le 2^i \cdot s(n-i) + i \cdot 2^{n+1}$

נציב i=n-1 ב- (8) ונקבל:

(9) $s(n) \le 2^{n-1} \cdot s(1) + (n-1) \cdot 2^{n+1} = 2^{n-1} \cdot 1 + (n-1) \cdot 2^{n+1} = \theta(n \cdot 2^n)$

לכן הראנו שמתקיים:

(10) $s(n) = O(n \cdot 2^n)$

לכוון השני, מההגדרה של s(n) נובע ש-

(11) $s(n) \ge n \cdot 2^n = \theta(n \cdot 2^n)$

לכן הראנו שמתקיים:

(12) $s(n) = \Omega(n \cdot 2^n)$

לסיכום הראנו ש-

(13) $s(n) = \theta(n \cdot 2^n)$