ביה"ס למדעי המחשב ומתמטיקה המכללה האקדמית נתניה
סמסטר ב' תשע"ז

28.4.2017

<u>מבני נתונים</u>
<u>פתרון תרגיל מס' 3</u>

.1

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם P1(n,m) שמקבלת כפרמטרים מספרים n ו- m.
הפונקציה קוראת לפונקצית עזר בשם F(x) שמקבלת כפרמטר מספר x ומתוארת
בהמשך . נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה (P1(n,m כתלות ב- n ו- m עבור המקרה ש $m < n^3$ (במונחים של ה- O הקטן ביותר שאתה/את יודע/ת להשיג).

```
P1(n,m)
-------
x=0
for (i = 1; i ≤ n^3; i++) {
  for (j = i; j ≤ m; j++) {
     x=x+F(i)· F(j)
  }
}
return x


F(x)
-------
s=0
for (i = 1; i ≤  x ; i++)
   {
     for (j = i; j ≤  x^2/2 ; j++)
       {
           s++
       }
   }
return s
```

הדרכה:

כאשר רוצים לחשב סכום טור שאינו מופיע בנוסחאות הידועות שרשומות בתחילת החוברת, אפשר לרשום אותו כסכום/חיסור של שני טורים שסכומם ידוע. לדוגמה בחישוב הטור:

$$1\cdot 3+2\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+2)$$

אפשר לשים לב שהאיבר ה- i של הטור הוא $i\cdot(i+2)$ ששווה ל- i^2+2i ולכן סכום הטור הנ"ל מתקבל כסכום של שני הטורים הבאים:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2$$

$$2(1+2+3\ldots+n)$$

פתרון שאלה 1

נסמן ב- $T_F(x)$ את זמן ביצוע הפונקציה $F(x)$ כתלות בפרמטר x.

נסמן ב- y את מספר הפעמים שנכנסים ללולאת ה- for הפנימית שבפונקציה $F(x)$.

$$(1)\quad T_F(x)=C_1+C_2\cdot x+C_3\cdot y$$

נחשב את y.

עבור $i=1$ נכנסים ללולאה הפנימית $\frac{x^2}{2}-1+1$ פעמים

עבור $i=2$ נכנסים ללולאה הפנימית $\frac{x^2}{2}-2+1$ פעמים

...

עבור $i=x$ נכנסים ללולאה הפנימית $\frac{x^2}{2}-x+1$ פעמים

מאחר ואנחנו מחשבים סיבוכיות, אפשר להניח שהניתוח נעשה עבור xים שגדולים מאיזשהו קבוע. לכן ניתן להניח שהניתוח נעשה עבור $x>2$ ולכן גם במקרה שבו $i=x$ נכנסים ללולאה הפנימית.

לכן:

$$y=\left(\frac{x^2}{2}-1+1\right)+\left(\frac{x^2}{2}-2+1\right)+\ldots+\left(\frac{x^2}{2}-x+1\right)=\frac{x^2}{2}\cdot x+1\cdot x-(1+2+\ldots+x)=$$

$$=\frac{x^3}{2}+x-\frac{x\cdot(x+1)}{2}=\frac{1}{2}\cdot(x^3-x^2+x)$$

נציב את y ב- (1) ונקבל:

$$(2)\quad T_F(x)=C_1+C_2\cdot x+C_3\cdot\frac{1}{2}\cdot(x^3-x^2+x)=\theta(x^3)$$

לכן לפי הגדרת θ קיימים קבועים D ו- N_0 כך שלכל $x\geq N_0$ מתקיים:

$$(3)\quad T_F(x)\leq D\cdot x^3$$

נסמן ב- T(n,m) את זמן ביצוע הפונקציה P1(n,m) כתלות בפרמטרים n ו- m. נסמן ב- A את סך כל זמן הביצוע של פונקצית העזר. נטפל במקרה שבו $m<n^3$

עבור $i=1$ נכנסים ללולאה הפנימית m פעמים

עבור $i=2$ נכנסים ללולאה הפנימית $m-1$ פעמים

...

עבור $i=m$ נכנסים ללולאה הפנימית 1 פעמים

עבור $i>m$ לא נכנסים ללולאה הפנימית

לכן:

$$T(n,m)=C_1+C_2\cdot n^3+C_3\cdot(m+(m-1)+\ldots+1)+A$$

ששקול ל-

$$(4)\quad T(n,m)=C_1+C_2\cdot n^3+C_3\frac{\cdot m\cdot(m+1)}{2}+A$$

נחשב את A

עבור $i=1,j=1$ קוראים לפונקציה F(1) ולפונקציה F(1)

עבור $i=1,j=2$ קוראים לפונקציה F(1) ולפונקציה F(2)

...

עבור $i=1,j=m$ קוראים לפונקציה F(1) ולפונקציה F(m)

עבור $i=2,j=2$ קוראים לפונקציה F(2) ולפונקציה F(2)

עבור $i=2,j=3$ קוראים לפונקציה F(2) ולפונקציה F(3)

...

עבור $i=2,j=m$ קוראים לפונקציה F(2) ולפונקציה F(m)

...

עבור $i=1,j=1$ קוראים לפונקציה F(1) ולפונקציה F(1)

עבור $i=1,j=2$ קוראים לפונקציה F(1) ולפונקציה F(2)
...
עבור $i=m,j=m$ קוראים לפונקציה F(m) ולפונקציה F(m)

אם ננתח את הטור הימני (מבין שני הטורים הנ"ל) נראה ש-
לפונקציה F(1) קוראים m פעמים
לפונקציה F(2) קוראים m-1 פעמים
...
לפונקציה F(m) קוראים 1 פעמים

לכן אם נסכם את הטור הימני נקבל את הנוסחה:

$$m\cdot T_F(1)+(m-1)\cdot T_F(2)+\ldots+1\cdot T_F(m)$$

אם ננתח את הטור השמאלי (מבין שני הטורים הנ"ל) נראה ש-
לפונקציה F(1) קוראים 1 פעמים
לפונקציה F(2) קוראים 2 פעמים
...
לפונקציה F(m) קוראים m פעמים

לכן אם נסכם את הטור השמאלי נקבל את הנוסחה:

$$1\cdot T_F(1)+2\cdot T_F(2)+\ldots+m\cdot T_F(m)$$

לכן בסך הכל נקבל ש-

$$A=m\cdot T_F(1)+(m-1)\cdot T_F(2)+\ldots+1\cdot T_F(m)+1\cdot T_F(1)+2\cdot T_F(2)+\ldots+m\cdot T_F(m)$$

נציב בשוויון הנ"ל את אי שוויון (3) ונקבל:

$$A\le D\cdot(m\cdot 1^3+(m-1)\cdot 2^3+\ldots+1\cdot m^3+1\cdot 1^3+2\cdot 2^3+\ldots+m\cdot m^3)$$

ששקול ל-

$$(5)\quad A\le D\cdot(m\cdot(1^3+2^3+\ldots+m^3)-(1\cdot 2^3+2\cdot 3^3+\ldots+(m-1)\cdot m^3)+1^4+2^4+\ldots+m^4)$$

כדי להעריך את הביטוי האחרון נשים לב ש-

$$m\cdot(1^3+2^3+\ldots+m^3)=m\cdot\frac{1}{4}\cdot m^2\cdot(m+1)^2=\theta(m^5)$$

וכן נשים לב ש-

$$1^4+2^4+\ldots+m^4=\frac{1}{30}\cdot m\cdot(m+1)\cdot(2m+1)\cdot(2m^2+3m-1)=\theta(m^5)$$

באי שוויון 5 ישנם 3 ביטויים: הראשון והשלישי חיוביים והראנו לעיל שניתן להעריך אותם כ- $\theta(m^5)$ הביטוי השני שלילי וקטן מהביטוי הראשון. הסיבה לכך היא שהביטוי הראשון פחות השני שווה ל- $m\cdot 1^3+(m-1)\cdot 2^3+\ldots+1\cdot m^3$ שזה משהו חיובי. לכן אין צורך להעריך את הסיבוכיות של הביטוי השלילי כי היא לא משמעותית ובסך הכל נקבל מ- **(5)** ש- $A=O(m^5)$

ולכן מ- **(4)** נקבל ש-

(6) $\mathbf{T(n,m)=O(n^3+m^5)}$

.2

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם P2(n) שמקבלת כפרמטר מספר n.
הפונקציה קוראת לפונקצית עזר שמתוארת בהמשך . נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה P2(n) כתלות ב- n (במונחים של θ).

```
P2(n)
-------
x=0
for (i = 1; i ≤ n; i++) {
  for (j = i; j ≤ n²; j++) {
     x=x+F(i·j)
  }
}
return x

F(y)
-------
s=0
for (i = 1; i ≤ y²; i++)
   {
   for (j = i²; j ≤ 2y; j++)
     {
        s++
     }
   }
return s
```

<u>הדרכה:</u>

נניח שיש צורך להעריך את סכום מהסוג הבא במונחים של θ:

$$1(1+2+\ldots+m)+2(2+3+\ldots m)+3(3+4+\ldots m)+\ldots+m(m)$$

מאחר וקשה למצוא את הנוסחה המדויקת של הסכום הנ"ל, ניתן מצד אחד להעריך את
הסכום הנ"ל במונחים של O בעזרת העובדה שהסכום הנ"ל קטן מ-:

$$1(1+2+\ldots+m)+2(1+2+3+\ldots m)+3(1+2+3+4+\ldots m)+\ldots+m(1+2+3+\ldots+m)$$

ומצד שני ניתן להעריך את הסכום הנ"ל במונחים של Ω אומגה בעזרת העובדה שהסכום הנ"ל
גדול מ-:

$$1(m/2+...+m)+2(m/2+...+m)+3(m/2+...+m)+...+m/2(m/2+...+m)$$

שימו לב שהסכום הנ"ל אינו בדיוק הסכום שצריך להעריך בשאלה.

<u>פתרון שאלה 2</u>

נסמן ב- $T_F(y)$ את זמן ביצוע הפונקציה $F(y)$ כתלות בפרמטר y.

נסמן ב- z את מספר הפעמים שנכנסים ללולאת ה- for הפנימית שבפונקציה F(y).

$$(1)\quad T_F(y)=C_1+C_2\cdot y^2+C_3\cdot z$$

נחשב את z.

עבור $i=1$ נכנסים ללולאה הפנימית $2y-1^2+1$ פעמים

עבור $i=2$ נכנסים ללולאה הפנימית $2y-2^2+1$ פעמים

...

עבור $i=\lfloor\sqrt{2y}\rfloor$ נכנסים ללולאה הפנימית $2y-(\lfloor\sqrt{2y}\rfloor)^2+1$ פעמים

עבור $i>\lfloor\sqrt{2y}\rfloor$ לא נכנסים ללולאה הפנימית.

לכן:

$$z=(2y-1^2+1)+(2y-2^2+1)+\ldots+(2y-(\lfloor\sqrt{2y}\rfloor)^2+1)=2y\cdot(\lfloor\sqrt{2y}\rfloor)^2+(\lfloor\sqrt{2y}\rfloor)^2=$$
$$=2y\cdot(\lfloor\sqrt{2y}\rfloor)^2+(\lfloor\sqrt{2y}\rfloor)^2-(1^2+2^2+\ldots+(\lfloor\sqrt{2y}\rfloor)^2)=$$
$$=2y\cdot(\lfloor\sqrt{2y}\rfloor)^2+(\lfloor\sqrt{2y}\rfloor)^2-\frac{1}{6}\cdot\lfloor\sqrt{2y}\rfloor\cdot(\lfloor\sqrt{2y}\rfloor+1)\cdot(2\cdot\lfloor\sqrt{2y}\rfloor+1)$$

נציב את z ב- (1) ונקבל:

$$(2)\quad T_F(y)=C_1+C_2\cdot y^2+C_3\cdot(2y\cdot(\lfloor\sqrt{2y}\rfloor)^2+(\lfloor\sqrt{2y}\rfloor)^2-\frac{1}{6}\cdot\lfloor\sqrt{2y}\rfloor\cdot(\lfloor\sqrt{2y}\rfloor+1)\cdot(2\cdot\lfloor\sqrt{2y}\rfloor+1))=\theta(y^2)$$

לכן לפי הגדרת θ קיימים קבועים D_1 D_2 ו- N_0 כך שלכל $y\geq N_0$ מתקיימים שני האי שוויונות הבאים:

$$(3)\quad T_F(y)\leq D_2\cdot y^2$$

$$(4)\quad T_F(y)\geq D_1\cdot y^2$$

נסמן ב- $T(n)$ את זמן ביצוע הפונקציה $P2(n)$ כתלות בפרמטר n.

נסמן ב- A את סך כל זמן הביצוע של פונקצית העזר.

עבור $i=1$ נכנסים ללולאה הפנימית n^2-1+1 פעמים

עבור $i=2$ נכנסים ללולאה הפנימית n^2-2+1 פעמים

...

עבור $i=n$ נכנסים ללולאה הפנימית n^2-n+1 פעמים

לכן:

$$T(n)=C_1+C_2\cdot n+C_3\cdot((n^2-1+1)+(n^2-2+1)+\ldots+(n^2-n+1))+A=$$
$$=C_1+C_2\cdot n+C_3\cdot(n\cdot n^2+n-(1+2+\ldots+n))+A$$

ששקול ל-

$$(5)\quad T(n)=C_1+C_2\cdot n+C_3\cdot\left(n\cdot n^2+n-\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)\right)+A$$

נחשב את A

עבור $i=1,j=1$ קוראים לפונקציה $F(1\cdot 1)$

עבור $i=1,j=2$ קוראים לפונקציה $F(1\cdot 2)$

...

עבור $i=1,j=n^2$ קוראים לפונקציה $F(1\cdot n^2)$

עבור $i=2,j=2$ קוראים לפונקציה $F(2\cdot 2)$

עבור $i=2,j=3$ קוראים לפונקציה $F(2\cdot 3)$

...

עבור $i=2,j=n^2$ קוראים לפונקציה $F(2\cdot n^2)$

...

עבור $i=n,j=n$ קוראים לפונקציה $F(n\cdot n)$

עבור $i=n,j=n+1$ קוראים לפונקציה $F(n\cdot(n+1))$

...

עבור $i=n,j=n^2$ קוראים לפונקציה $F(n\cdot n^2)$

לכן בסך הכל נקבל ש-

$$\begin{aligned}A=&T_F(1\cdot 1)+T_F(1\cdot 2)+\dots+T_F(1\cdot n)+T_F(1\cdot(n+1))+\dots+T_F(1\cdot n^2)+\\ &+T_F(2\cdot 2)+\dots+T_F(2\cdot n)+T_F(2\cdot(n+1))+\dots+T_F(2\cdot n^2)+\\ &\dots\\ &+T_F(n\cdot n)+T_F(n\cdot(n+1))+\dots+T_F(n\cdot n^2)\end{aligned}$$

נציב בשוויון הנ"ל את אי שוויון (3) ונקבל:

$$\begin{aligned}A\le D_2\cdot(&(1\cdot 1)^2+(1\cdot 2)^2+\dots+(1\cdot n)^2+(1\cdot(n+1))^2+\dots+(1\cdot n^2)^2+\\ &+(2\cdot 2)^2+\dots+(2\cdot n)^2+(2\cdot(n+1))^2+\dots+(2\cdot n^2)^2+\\ &\dots\\ &+(n\cdot n)^2+(n\cdot(n+1))^2+\dots+(n\cdot n^2)^2)\end{aligned}$$

ששקול ל-

$$\begin{aligned}A\le D_2\cdot(&1^2\cdot(1^2+2^2+\dots+(n^2)^2)+\\ &+2^2\cdot(2^2+\dots+(n^2)^2)+\\ &\dots\\ &+n^2\cdot(n^2+\dots+(n^2)^2))\end{aligned}$$

על מנת לקבל הערכה של O נגדיל את כל אחד מהאיברים בביטוי הנ"ל כך שסכומי הריבועים יתחילו מ- 1 בכל שורה ונקבל:

$$\begin{aligned}A\le D_2\cdot(&1^2\cdot(1^2+2^2+\dots+(n^2)^2)+\\ &+2^2\cdot(1^2+2^2+\dots+(n^2)^2)+\\ &\dots\\ &+n^2\cdot(1^2+2^2+\dots+(n^2)^2))\end{aligned}$$

ששקול ל-

$$A\le D_2\cdot((1^2+2^2+\dots+n^2)\cdot(1^2+2^2+\dots+(n^2)^2))$$

ששקול ל-

$$A\le D_2\cdot\left(\left(\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot n^2\cdot(n^2+1)\cdot(2n^2+1)\right)\right)=\theta(n^9)$$

ולכן הראנו ש-

$$(6)\quad A=O(n^9)$$

מ- (5) ו- (6) נקבל ש-

$$(7)\quad T(n)=O(n^9)$$

לכוון השני, הראנו למעלה ש-

$$
\begin{aligned}
A = &T_F(1\cdot 1)+T_F(1\cdot 2)+\ldots+T_F(1\cdot n)+T_F(1\cdot(n+1))+\ldots+T_F(1\cdot n^2)+\\
&+T_F(2\cdot 2)+\ldots+T_F(2\cdot n)+T_F(2\cdot(n+1))+\ldots+T_F(2\cdot n^2)+\\
&\ldots\\
&+T_F(n\cdot n)+T_F(n\cdot(n+1))+\ldots+T_F(n\cdot n^2)
\end{aligned}
$$

נציב בשוויון הנ"ל את אי שוויון (4) ונקבל:

$$
\begin{aligned}
A \ge D_1\cdot(&(1\cdot 1)^2+(1\cdot 2)^2+\ldots+(1\cdot n)^2+(1\cdot(n+1))^2+\ldots+(1\cdot n^2)^2+\\
&+(2\cdot 2)^2+\ldots+(2\cdot n)^2+(2\cdot(n+1))^2+\ldots+(2\cdot n^2)^2+\\
&\ldots\\
&+(n\cdot n)^2+(n\cdot(n+1))^2+\ldots+(n\cdot n^2)^2)
\end{aligned}
$$

ששקול ל-

$$
\begin{aligned}
A \ge D_1\cdot(&1^2\cdot(1^2+2^2+\ldots+(n^2)^2)+\\
&+2^2\cdot(2^2+\ldots+(n^2)^2)+\\
&\ldots\\
&+n^2\cdot(n^2+\ldots+(n^2)^2))
\end{aligned}
$$

על מנת לקבל הערכה של Ω נקטין את כל אחד מהאיברים בביטוי הנ"ל כך שסכומי הריבועים יתחילו מ- n^2 בכל שורה ונקבל:

$$
\begin{aligned}
A \ge D_1\cdot(&1^2\cdot(n^2+(n+1)^2+\ldots+(n^2)^2)+\\
&+2^2\cdot(n^2+(n+1)^2+\ldots+(n^2)^2)+\\
&\ldots\\
&+n^2\cdot(n^2+(n+1)^2+\ldots+(n^2)^2))
\end{aligned}
$$

ששקול ל-

$$
(8)\quad A \ge D_1\cdot((1^2+2^2+\ldots+n^2)\cdot(n^2+(n+1)^2+\ldots+(n^2)^2))
$$

כדי לקבל הערכה של הביטוי האחרון נשים לב ש-

$$
(9)\quad 1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)=\theta(n^3)
$$

וכן נשים לב ש-

$$
\begin{aligned}
(10)\quad &n^2+(n+1)^2+\ldots+(n^2)^2=(1^2+2^2+\ldots+(n^2)^2)-(1^2+2^2+\ldots(n-1)^2)=\\
&=\frac{1}{6}\cdot n^2\cdot(n^2+1)\cdot(2n^2+1)-\frac{1}{6}\cdot(n-1)\cdot n\cdot(2(n-1)+1)=\theta(n^6)
\end{aligned}
$$

מ- (9) ו- (10) נקבל שהאיבר הימני בביטוי של (8) הוא מסדר גודל של $\theta(n^9)$ ולכן נקבל מ- (8) ש-

$$\mathbf{A} = \Omega(\mathbf{n}^9) \quad (11)$$

מ- (5) ו- (11) נקבל ש-

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \Omega(\mathbf{n}^9) \quad (12)$$

מ- (7) ו- (12) נקבל ש-

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \theta(\mathbf{n}^9) \quad (13)$$

.3

בשאלה זו הסימון: i % n

משמעותו: שארית החלוקה של i ב- n.

לדוגמה: 8 % 20 שווה ל- 4

להלן תוכנית רקורסיבית בשם P3 שמקבלת פרמטרים מערך A ומספר k.

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה (במונחים של θ) של התוכנית כתלות ב- n, כאשר n מציין את גודל המערך A שמועבר לפונקציה כפרמטר.

```
P3(A,k)
n = length(A)
if n == 1 return A[1]
if n == 2 return A[2]
for (i = 1; i ≤ n² ; i++) {
    A[i%n]=A[(2i)%n]
 }
x=P3(A[1: ⌊n/3⌋ ],k)

if x ≤ k { return x+P3(A[1: ⌊n/6⌋ ],k)}

else  { return 2x+P3(A[1: ⌊n/5⌋ ],k)}
```

<u>הדרכה:</u>

נניח שכתוצאה מניתוח קוד מסויים מגיעים לנוסחת נסיגה מהסוג הבא:

(הנוסחה הזו אינה בהכרח הנוסחה שיוצאת מניתוח הקוד שבשאלה).

$T(n) \le C_1 + C_2 n^5 + T(n/4) + T(n/5)$

במקרה הזה ניתן להעריך את T(n) במונחים של O בעזרת העובדה שמתקיים:

$T(n) \le C_3 n^5 + 2T(n/4)$

עבור איזשהו קבוע C3 מספיק גדול (ועבור כל n שגדול מאיזשהו N_0).

אין צורך לפרט מיהם C3 ו- N_0.

ה- O שנקבל בניתוח הנ"ל לא בהכרח יהיה ה- O הקטן ביותר שאפשר להשיג. מצד שני

אם מתוך ניתוח אותו הקוד נוכל להעריך את T(n) במונחים של Ω כך שה- O וה Ω זהים אז נוכל להגיע להערכה של T(n) במונחים של θ.

<u>פתרון שאלה 3</u>

נסמן ב- T(n) את זמן ביצוע התכנית P3(A,k) כתלות ב- n, כאשר n מציין את גודל המערך A שמועבר לתכנית כפרמטר.

מאחר ואנחנו מנתחים מקרה גרוע ביותר, ניתן להניח שתנאי ה- if $x \le k$ שבשורה שלפני האחרונה בתכנית P3(A,k) לא מתקיים.

ולכן נקבל ש-

$$T(n) \le C_1 + C_2 n^2 + T(\frac{n}{3}) + T(\frac{n}{5})$$

ולכן מתקיים עבור איזשהו קבוע C3 מספיק גדול (ועבור כל n שגדול מאיזשהו N_0) ש-

$$(1)\ \ T(n) \le 2T(\frac{n}{3}) + C_3 n^2$$

נמשיך בשיטת ההצבה (בתרגיל הזה אסור היה להשתמש במשפט המסטר).

נציב $\frac{n}{3}$ במקום n ב- (1) ונקבל:

$$(2)\ \ T(\frac{n}{3}) \le 2T(\frac{n}{3^2}) + C_3 (\frac{n}{3})^2$$

מ- (1) ו- (2) נקבל:

$$(3)\ \ T(n) \le 2 \cdot (2T(\frac{n}{3^2}) + C_3 (\frac{n}{3})^2) + C_3 n^2$$

ששקול ל-

$$(4)\ \ T(n) \le 2^2 T(\frac{n}{3^2}) + C_3 \cdot n^2 \cdot (1 + 2 \cdot (\frac{1}{3})^2)$$

נציב $\frac{n}{3^2}$ במקום n ב- (1) ונקבל:

$$(5)\ \ T(\frac{n}{3^2}) \le 2T(\frac{n}{3^3}) + C_3 (\frac{n}{3^2})^2$$

מ- (4) ו- (5) נקבל:

$$(6)\ T(n)\le 2^2\cdot(2T(\frac{n}{3^3})+C_3(\frac{n}{3^2})^2)+C_3\cdot n^2\cdot(1+2\cdot(\frac{1}{3})^2)$$

ששקול ל-

$$(7)\ T(n)\le 2^3T(\frac{n}{3^3})+C_3\cdot n^2\cdot(1+2\cdot(\frac{1}{3})^2+2^2\cdot(\frac{1}{3})^4)$$

הנוסחה הנ"ל היא עבור i=3. מתוך הנוחה הנ"ל נסיק שבאופן כללי עבור i כלשהו נקבל:

$$(8)\ T(n)\le 2^iT(\frac{n}{3^i})+C_3\cdot n^2\cdot(1+2\cdot(\frac{1}{3})^2+2^2\cdot(\frac{1}{3})^4+\ldots+2^{i-1}\cdot(\frac{1}{3})^{2(i-1)})$$

מאחר ו-

$$(9)\ 1+2\cdot(\frac{1}{3})^2+2^2\cdot(\frac{1}{3})^4+\ldots+2^{i-1}\cdot(\frac{1}{3})^{2(i-1)}<1+3\cdot(\frac{1}{3})^2+3^2\cdot(\frac{1}{3})^4+\ldots+3^{i-1}\cdot(\frac{1}{3})^{2(i-1)}$$

ששקול ל-

$$(10)\ 1+2\cdot(\frac{1}{3})^2+2^2\cdot(\frac{1}{3})^4+\ldots+2^{i-1}\cdot(\frac{1}{3})^{2(i-1)}<1+\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+\ldots+(\frac{1}{3})^{(i-1)}$$

מ- (10) נקבל ש-

$$(11)\ 1+2\cdot(\frac{1}{3})^2+2^2\cdot(\frac{1}{3})^4+\ldots+2^{i-1}\cdot(\frac{1}{3})^{2(i-1)}<1+\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+\ldots+(\frac{1}{3})^{(i-1)}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

מ- (8) ו- (11) נקבל:

$$(12)\ T(n)<2^iT(\frac{n}{3^i})+C_3\cdot n^2\frac{\cdot 3}{2}$$

נציב $i=\log_3 n$ בנוסחה הנ"ל (מאחר ו- i צריך להיות מספר שלם צריך בעצם להציב $i=\lceil\log_3 n\rceil$ אבל כדי לפשט את החישוב אנחנו מתעלמים מכך).

ונקבל:

$$(13)\ T(n)<2^{\log_3 n}T(1)+C_3\cdot n^2\frac{\cdot 3}{2}$$

מאחר ו- $T(1)<C_3$ נקבל:

$$(14)\ T(n)<2^{\log_3 n}\cdot C_3+C_3\cdot n^2\frac{\cdot 3}{2}=C_3\cdot(2^{\frac{\log_2 n}{\log_2 3}}+n^2\frac{\cdot 3}{2})=C_3\cdot(n^{\frac{1}{\log_2 3}}+n^2\frac{\cdot 3}{2})=\theta(n^2)$$

ולכן הראנו ש-

$$(15)\ T(n)=O(n^2)$$

לכוון השני, מאחר ולולאה שבתחילת התכנית נכנסים n^2 פעמים נקבל ש-

$$(16)\quad T(n) \geq n^2 = \theta(n^2)$$

ולכן נקבל ש-

$$(17)\quad T(n) = \Omega(n^2)$$

מ- (15) ו- (17) נקבל:

$$(18)\quad T(n) = \theta(n^2)$$

.4

הוכח ש-

$$1^2 \cdot 2^1 + 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 + \ldots + n^2 \cdot 2^n = \theta\left(n^2 \cdot 2^n\right)$$

<u>הדרכה:</u> הוכיחו באינדוקציה שהאיבר האחרון בסדרה גדול יותר מסכום כל האיברים שלפניו.

<u>פתרון שאלה 3</u>

נוכיח באינדוקציה שהאיבר האחרון בסדרה גדול יותר מסכום כל האיברים שלפניו.

<u>בסיס האינדוקציה</u>

עבור n=1 ברור שהטענה נכונה כי יש רק איבר אחד אז אין לפניו איברים. לכן נבדוק את הטענה גם עבור n=2 במקרה זה האיבר האחרון הוא $2^2 \cdot 2^2$ והוא יותר גדול מסכום האיברים שלפניו שמכילים רק איבר אחד שהוא $1^2 \cdot 2^1$

<u>הנחת האינדוקציה</u>

נניח שהטענה נכונה עבור n=k דהינו נניח שהטענה הבאה נכונה:

$$(1)\quad 1^2 \cdot 2^1 + 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 + \ldots + (k-1)^2 \cdot 2^{k-1} < k^2 \cdot 2^k$$

<u>הוכחת האינדוקציה</u>

נראה שמההנחה שהטענה נכונה עבור n=k נובע שהטענה נכונה עבור n=k+1. דהינו נראה שהטענה הבאה נכונה:

$$(2)\quad 1^2 \cdot 2^1 + 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 + \ldots + (k)^2 \cdot 2^k < (k+1)^2 \cdot 2^{k+1}$$

נוכיח את (2)

$$(3)\ \ 1^2\cdot 2^1+2^2\cdot 2^2+3^2\cdot 2^3+...+(k)^2\cdot 2^k=1^2\cdot 2^1+2^2\cdot 2^2+3^2\cdot 2^3+...+(k-1)^2\cdot 2^{k-1}+(k)^2\cdot 2^k$$

מ- (1) ו- (3) נקבל:

$$(3)\ \ 1^2\cdot 2^1+2^2\cdot 2^2+3^2\cdot 2^3+...+(k)^2\cdot 2^k<(k)^2\cdot 2^k+(k)^2\cdot 2^k$$

ששקול ל-

$$(4)\ \ 1^2\cdot 2^1+2^2\cdot 2^2+3^2\cdot 2^3+...+(k)^2\cdot 2^k<(k)^2\cdot 2^{k+1}$$

מ- (4) נובע ש-

$$(5)\ \ 1^2\cdot 2^1+2^2\cdot 2^2+3^2\cdot 2^3+...+(k)^2\cdot 2^k<(k+1)^2\cdot 2^{k+1}$$

מאחר ו- (5) זהה ל- (2) הראנו ש- (2) מתקיים.

לסיכום הוכחנו באינדוקציה שהאיבר האחרון בסדרה גדול יותר מסכום כל האיברים שלפניו.
לכן נקבל ש-

$$1^2\cdot 2^1+2^2\cdot 2^2+3^2\cdot 2^3+...+n^2\cdot 2^n=1^2\cdot 2^1+2^2\cdot 2^2+3^2\cdot 2^3+...+(n-1)^2\cdot 2^{(n-1)}+n^2\cdot 2^n<n^2\cdot 2^n+n^2\cdot 2^n=$$
$$=2\cdot n^2\cdot 2^n=\theta(n^2\cdot 2^n)$$

ולכן הראנו ש-

$$1^2\cdot 2^1+2^2\cdot 2^2+3^2\cdot 2^3+...+n^2\cdot 2^n=O(n^2\cdot 2^n)$$

לכוון השני,

$$1^2\cdot 2^1+2^2\cdot 2^2+3^2\cdot 2^3+...+n^2\cdot 2^n\geq n^2\cdot 2^n=\theta(n^2\cdot 2^n)$$

ולכן הראנו ש-

$$1^2\cdot 2^1+2^2\cdot 2^2+3^2\cdot 2^3+...+n^2\cdot 2^n=\Omega(n^2\cdot 2^n)$$

ולסיכום הראנו ש-

$$1^2\cdot 2^1+2^2\cdot 2^2+3^2\cdot 2^3+...+n^2\cdot 2^n=\theta(n^2\cdot 2^n)$$