ביה״ס למדעי המחשב ומתמטיקה
סמסטר ב׳ תשע״ו

המכללה האקדמית נתניה

16.5.2016

<u>מבני נתונים</u>
<u>פתרון תרגיל מס׳ 4</u>

1.

בשאלה זו הסימון: **i mod n**

משמעותו: שארית החלוקה של **i** ב- **n**.

לדוגמה: 20 mod 8 שווה ל- 4

להלן תוכנית רקורסיבית בשם **P1** שמקבלת פרמטרים מערך **A** ומספר **k**.

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה (במונחים של θ) של התוכנית כתלות ב- **n**, כאשר **n** מציין את גודל המערך **A** שמועבר לפונקציה כפרמטר.

<u>**P1(A,k)**</u>

n = length(A)

if n == 1 return A[1]

if n == 2 return A[2]

for (i = 1; i ≤ n^3 ; i++) {

A[i mod n]=A[i+3 mod n]

}

if A[$\lfloor n/2 \rfloor$]) ≤ k return 4 · P1(A[$\lfloor n/2 \rfloor$],k)

if A[$\lfloor n/2 \rfloor$]) > k

return P1(A[1: $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$],k) · P1(A[$\lfloor \frac{4n}{9} \rfloor$:n-1],k)

פתרון

נסמן ב- T(n) את זמן ביצוע התכנית כתלות ב- n, כאשר n מציין את גודל המערך שמועבר לפונקציה כפרמטר.

נשים לב שמשני התנאים של ה- if התנאי השני לוקח יותר זמן. מאחר ואנחנו מנתחים סיבוכיות זמן במקרה הגרוע ביותר נניח שהקלט לתכנית הוא כזה שבכל שלב בוחרים בתנאי השני. נוסחת הנסיגה היא לכן:

$$T(n) \le C_1 + C_2 \cdot n^3 + T(\lfloor n/6 \rfloor) + T(\lfloor 5n/9 \rfloor)$$

ולכן

$$T(n) \le C_1 + C_2 \cdot n^3 + 2 \cdot T(\lfloor 5n/9 \rfloor)$$

ננתח לפי משפט המסטר (לפי ההרחבה של המשפט) ונקבל:

a=2 b=9/5

$$f(n) = C_1 + C_2 \cdot n^3 \qquad n^{\log_b a} = n^{\log_{9/5} 2}$$

ולכן לפי משפט המסטר (מקרה 3) נסיק:

$$T(n) = O(n^3)$$

לכוון השני,

$$T(n) \ge n^3 = \theta(n^3)$$

ולכן מתקיים:

$$T(n) = \Omega(n^3)$$

ולסיכום הראנו ש-

$$T(n) = \theta(n^3)$$

.2

שאלה זו הופיעה במבחן מועד א בסמסטר אביב 2015

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם P2(n) שמקבלת כפרמטר מספר n.
הפונקציה קוראת לפונקצית עזר בשם F(m) שמקבלת כפרמטר מספר m ומתוארת בהמשך.

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה P2(n) כתלות ב- n (במונחים של ה- O הקטן ביותר שאתה/את יודע/ת להשיג).

```
P2(n)
-------
x=0
for (i = 1; i ≤ n^2 ; i++) {
  j=1
  while  j≤n^2  {

      x=x+i·F(j)

      j=j·2
  }
}

return x


F(m)
-------
if (m≤1) {return 1}
s=0
for (i = 1; i ≤ m; i++)
   {
     s=s+i
   }
return  s+F(m/2)+F(m/3)
```

פתרון

נסמן ב- $T_F(m)$ את זמן הריצה של פונקצית העזר כתלות בפרמטר m.

$T_F(m) \le C_1 + C_2 \cdot m + T_F(m/2) + T_F(m/3)$

בשאלה זו לא נוכל להשתמש בשיטת המסטר כפי שהשתמשנו בשאלה 1
ולכן נשתמש בשיטת עץ רקורסיה.

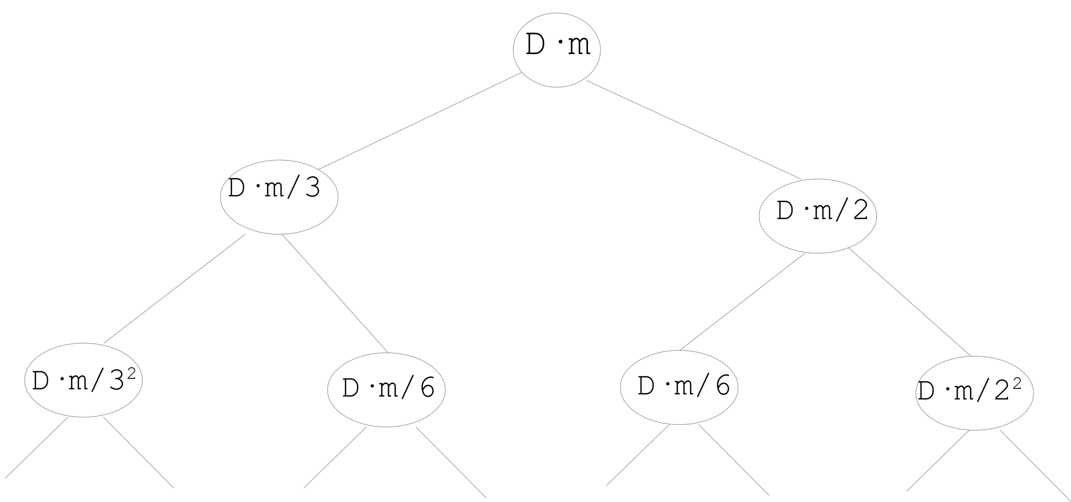
לכל m>1 קיים D כך ש-

$C_1 + C_2 \cdot m \le D \cdot m$

ולכן

$T_F(m) \le D \cdot m + T_F(m/2) + T_F(m/3)$

עץ הרקורסיה המתאים לאי שוויון הנ"ל נראה כך:



סכום האיברים ברמה הראשונה בעץ הוא: $D \cdot m$

סכום האיברים ברמה השניה בעץ הוא: $D \cdot 5/6 \cdot m$

סכום האיברים ברמה השלישית בעץ הוא: $D \cdot (5/6)^2 \cdot m$

ולכן:

$T_F(m) \le D \cdot m + D \cdot 5/6 \cdot m + D \cdot (5/6)^2 \cdot m + \ldots = D \cdot m \cdot (1 + 5/6 + (5/6)^2 + \ldots) = D \cdot m \cdot 1/(1-5/6) = \theta(m)$

ולכן נקבל: $T_F(m) = O(m)$

מאחר ו- $T_F(m) \ge m = \theta(m)$

נקבל: $T_F(m)=\Omega(m)$

ולכן נקבל: $T_F(m)=\theta(m)$

לכן לפי הגדרת θ קימים קבועים D_1 D_2 ו- N_0 כך שלכל $m\geq N_0$ מתקיימים שני האי שוויונות הבאים:

$$(1)\quad T_F(m)\leq D_2\cdot m$$

$$(2)\quad T_F(m)\geq D_1\cdot m$$

נסמן ב- T(n) את זמן ביצוע הפונקציה P2(n) כתלות בפרמטר n.
נסמן ב- A את סך כל זמן הביצוע של פונקצית העזר.

נסמן ב- x את מספר הפעמים שנכנסים ללולאת ה- while הפנימית עבור כניסה אחת ללולאת ה- for החיצונית.

נחשב את x.

נסמן ב- j_k את הערך של j אחרי k כניסות ללולאת ה- while בסוף הלולאה.
נקבל ש- $j_1=2\ \ j_2=2^2\ \ j_3=2^3\ldots j_k=2^k$

מאחר ולא נכנסים x+1 פעמים ללולאת ה- while (עבור כניסה אחת ללולאה החיצונית) מתקיים:

$$j_x>n^2$$

ששקול ל-

$$2^x>n^2$$

ששקול ל-

$$(3)\quad x>\log_2 n^2=2\log_2 n$$

מאחר ונכנסים x פעמים ללולאת ה- while (עבור כניסה אחת ללולאה החיצונית מתקיים:

$$j_{x-1}\leq n^2$$

ששקול ל-

$$2^{x-1}\leq n^2$$

ששקול ל-

$$x-1\leq\log_2 n^2$$

ששקול ל-

$$(4)\quad x\leq 1+2\log_2 n$$

מ- (3) ו- (4) ומכך ש- x מספר שלם נובע ש-

$$(5)\quad x=\lfloor 1+2\log_2 n\rfloor$$

עבור כל ערך של i בלולאת ה- for החיצונית נכנסים x פעמים ללולאת ה- while הפנימית ולכן:

$$(6)\quad T(n)=C_1+C_2\cdot n^2+C_3\cdot n^2\cdot x+A=C_1+C_2\cdot n^2+C_3\cdot n^2\cdot\lfloor 1+2\log_2 n\rfloor+A$$

שימו לב שאין קשר בין הקבועים C_1 ו- C_2 שמופיעים ב- (6) לאלו שהופיעו בחישוב של $T_F(m)$ באי השוויון שהופיע בתחילת הפתרון.

נחשב את A.

נשים לב שעבור כל ערך של i קוראים לפונקצית העזר F עם אותם ערכים של j ששוים ל- $j=1, j=2, j=2^{2}, \ldots, j=2^{x-1}$

הערך האחרון של j שאיתו קוראים לפונקצית העזר הוא $j=2^{x-1}$ כי עם הערך $j=2^{x}$ לא נכנסים ללולאת ה- while.

עבור $i=1$:

עבור $j=1$ קוראים לפונקציה F(1)
עבור $j=2$ קוראים לפונקציה F(2)
עבור $j=2^2$ קוראים לפונקציה $F(2^2)$
...
עבור $j=2^{x-1}$ קוראים לפונקציה $F(2^{x-1})$

באופן דומה עבור $i=2, i=3, \ldots, i=n^2$

לכן נקבל:

$$(7)\quad A=n^2\cdot\left(T_F(1)+T_F(2)+T_F(2^2)+\ldots+T_F(2^{x-1})\right)$$

מ- (1) ו- (7) נקבל:

$$(8)\quad A\le D_2\cdot n^2\cdot(1+2+2^2+\ldots+2^{x-1})=D_2\cdot n^2\cdot(2^x-1)=D_2\cdot n^2\cdot\left(2^{\lfloor 1+2\log_2 n\rfloor}-1\right)$$

מ- (6) ו- (8) נקבל:

$$(9)\quad T(n)\le C_1+C_2\cdot n^2+C_3\cdot n^2\cdot\lfloor 1+2\log_2 n\rfloor+D_2\cdot n^2\cdot\left(2^{\lfloor 1+2\log_2 n\rfloor}-1\right)=\theta(n^4)$$

לסיכום נקבל: $T(n)=O(n^4)$

3. שאלה זו הופיעה במבחן מועד ב בסמסטר אביב 2015

נזכיר שסכום סדרה חשבונית בעלת n איברים ניתן לחישוב על ידי הנוסחה הבאה:

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם P3(n) שמקבלת כפרמטר מספר n.
הפונקציה קוראת לפונקצית עזר בשם F(m) שמקבלת כפרמטר מספר m ומתוארת בהמשך.

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה P3(n) כתלות ב- n (במונחים של ה- O הקטן ביותר שאתה/את יודע/ת להשיג).

```
P3(n)
-----
x=0
for (i = 1; i ≤ n ; i++) {
  for (j = 1; j ≤ 2i ; j++) {
      x=x+2
  }
}

z=0
for (i = 1; i ≤ n ; i=i·2) {
  z=z+i·F(x)
}

return z


F(m)
----
if (m≤1) {return 1}
s=0
for (i = 1; i ≤  2^m ; i++)
   {
     s=s+i
   }
return  s+F(m/4)
```

פתרון

נסמן ב- $T_F(m)$ את זמן הריצה של פונקצית העזר כתלות בפרמטר m.

$T_F(m) \le C_1 + C_2 \cdot 2^m + T_F(m/4)$

ננתח לפי משפט המסטר (לפי ההרחבה של המשפט) ונקבל:

a=1 b=4

$f(m) = C_1 + C_2 \cdot 2^m$ $\qquad m^{\log_b a} = m^{\log_4 1}$

ולכן לפי משפט המסטר (מקרה 3) נסיק:

$T(m) = O(2^m)$

לכוון השני,

$T(m) \ge 2^m = \theta(2^m)$

ולכן מתקיים:

$T(m) = \Omega(2^m)$

ולסיכום הראנו ש-

$T(m) = \theta(2^m)$

לכן לפי הגדרת θ קיימים קבועים D_1 D_2 ו- N_0 כך שלכל $m \ge N_0$ מתקיימים שני האי שוויונות הבאים:

$(1) \quad T_F(m) \le D_2 \cdot 2^m$

$(2) \quad T_F(m) \ge D_1 \cdot 2^m$

נסמן ב- T(n) את זמן ביצוע הפונקציה P3(n) כתלות בפרמטר n. נסמן ב- A את סך כל זמן הביצוע של פונקצית העזר.

נסמן ב- y את מספר הפעמים שנכנסים ללולאת ה- for הפנימית בקטע הקוד הראשון של הפונקציה הראשית.

נסמן ב- t את מספר הפעמים שנכנסים ללולאת ה- for בקטע הקוד השני של הפונקציה הראשית.

$(3) \quad T(n) = C_1 + C_2 \cdot n + C_3 \cdot y + C_4 \cdot t + A$

מדוגמאות קודמות אנחנו יודעים ש- $t = \lfloor 1 + \log_2 n \rfloor$

נחשב את y.

עבור $i=1$ נכנסים ללולאה הפנימית 2 פעמים

עבור $i=2$ נכנסים ללולאה הפנימית פעמים 4

עבור $i=3$ נכנסים ללולאה הפנימית 6 פעמים

...

עבור $i=n$ נכנסים ללולאה הפנימית $2n$ פעמים

לכן:

$$(4)\quad y=2+4+6+\ldots+2n=2\cdot(1+2+\ldots+n)=n\cdot(n+1)$$

מאחר ובכל כניסה ללולאת ה- for הפנימית מגדילים את x ב- 2 הערך של x בסוף קטע הקוד הראשון הוא:

$$(5)\quad x=2\cdot y=2n\cdot(n+1)$$

נחשב את A.

לפונקצית העזר קוראים בכל כניסה ללולאת ה- while עם אותו ערך של x ששווה ל- $x=2n\cdot(n+1)$ ומאחר ומספר הכניסות ללולאת ה- while הוא t ששווה ל- $t=\lfloor 1+\log_2 n\rfloor$ נקבל:

$$(6)\quad A=t\cdot T_F(x)=\lfloor 1+\log_2 n\rfloor\cdot T_F(2n\cdot(n+1))$$

מ- (1) ו- (6) נקבל:

$$(7)\quad A\le\lfloor 1+\log_2 n\rfloor\cdot D_2\cdot 2^{2n\cdot(n+1)}$$

מ- (3) (4) ו- (7) נקבל:

$$T(n)\le C_1+C_2\cdot n+C_3\cdot n\cdot(n+1)+C_4\cdot\lfloor 1+\log_2 n\rfloor+\lfloor 1+\log_2 n\rfloor\cdot D_2\cdot 2^{2n\cdot(n+1)}$$
$$=\theta\left(\log n\cdot 2^{2n\cdot(n+1)}\right)$$

לסיכום נקבל: $T(n)=O\left(\log n\cdot 2^{2n\cdot(n+1)}\right)$

.4

נתונה נוסחת הנסיגה הבאה:

$$T(n)=T\left(\frac{n}{4}\right)+T\left(\frac{n}{25}\right)+T\left(\frac{n}{100}\right)+n$$

כאשר $T(i)=0$ עבור $i < 1$.

הערך את $T(n)$ במונחים של θ. נמק/י את תשובתך.

<u>פתרון</u>

$$T(n)\le 3\cdot T(n/4)+n$$

ננתח לפי משפט המסטר (לפי ההרחבה של המשפט) ונקבל:

a=3 b=4

$$f(n)=n \qquad n^{\log_b a}=n^{\log_4 3}$$

ולכן לפי משפט המסטר (מקרה 3) נסיק:

$$T(n)=O(n)$$

לכוון השני,

$$T(n)\ge n=\theta(n)$$

ולכן נסיק: $T(n)=\Omega(n)$

ולסיכום נקבל: $T(n)=\theta(n)$

.5

עבור נוסחאות הנסיגה הבאות השתמש/י במשפט ה- master כדי להעריך את T(n) במונחים של θ. נמק/י את תשובתך. אם לא ניתן להשתמש במשפט ה- master ציין/צייני את הסיבה (במקרה זה אין צורך להעריך את T(n)).

א)

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}\,(\log_2 n)^3$$

<u>פתרון</u>

ננתח לפי משפט המסטר ונקבל:

a=3 b=4

$f(n)=\sqrt{n}\cdot(\log_2 n)^3$ $\qquad$ $n^{\log_b a}=n^{\log_4 3}$

ולכן לפי משפט המסטר (מקרה 1) נסיק:

$T(n)=\theta\left(n^{\log_4 3}\right)$

ב)

$$T(n) = 10\cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + n^{2.1} + n^2(\log_2 n)^8$$

<u>פתרון</u>

ננתח לפי משפט המסטר ונקבל:

a=10 b=3

$f(n)=n^{2.1}+n^2\cdot(\log_2 n)^8$ $\qquad$ $n^{\log_b a}=n^{\log_3 10}$

ולכן לפי משפט המסטר (מקרה 3) נסיק:

$T(n)=\theta\left(n^{2.1}\right)$

ג)

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n^2}{3}\right) + n$$

<u>פתרון</u>

לא ניתן להשתמש במשפט המסטר במקרה זה כי האיבר $T(\frac{n^2}{3})$ אינו מהצורה $a \cdot T(\frac{n}{b})$.

ד)

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{\sqrt{0.3}}\right) + n^2$$

<u>פתרון</u>

לא ניתן להשתמש במשפט המסטר במקרה זה כי האיבר $2 \cdot T(\frac{n}{\sqrt{0.3}})$ אינו מהצורה $a \cdot T(\frac{n}{b})$ עבור $b>1$.

ה)

$$T(n) = 4 \cdot T\left(\frac{n}{1.3}\right) + n\log_2 n$$

<u>פתרון</u>

ננתח לפי משפט המסטר ונקבל:

$a=4$ $b=1.3$

$f(n)=n \cdot \log_2 n$ $\qquad\qquad$ $n^{\log_b a}=n^{\log_{1.3} 4}$

ולכן לפי משפט המסטר (מקרה 1) נסיק:

$T(n)=\theta(n^{\log_{1.3} 4})$

ו)

$$T(n) = 3\cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{\frac{n}{2}}$$

<u>פתרון</u>

ננתח לפי משפט המסטר ונקבל:

a=3 b=2

$$f(n)=\sqrt{\frac{n}{2}} \qquad n^{\log_b a}=n^{\log_2 3}$$

ולכן לפי משפט המסטר (מקרה 1) נסיק:

$$T(n)=\theta\left(n^{\log_2 3}\right)$$

ז)

$$T(n) = 1.5\cdot T(n) + n^3 + n^2$$

<u>פתרון</u>

לא ניתן להשתמש במשפט המסטר במקרה זה כי האיבר $1.5\cdot T(n)$ אינו מהצורה $a\cdot T(\frac{n}{b})$ עבור $b>1$.

ח)

$$T(n) = 2\cdot T(n-1) + n^3$$

<u>פתרון</u>

לא ניתן להשתמש במשפט המסטר במקרה זה כי האיבר $2\cdot T(n-1)$ אינו מהצורה $a\cdot T(\frac{n}{b})$.