בית הספר למדעי המחשב   המכללה האקדמית נתניה
סמסטר ב' תשע"ז

28.4.2017

מבני נתונים
פתרון תרגיל מס' 4

.1

שאלה זו הופיעה במבחן מועד א בשנת 2016

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם P1(n,m) שמקבלת כפרמטר מספר n. הפונקציה קוראת לפונקצית עזר בשם F(x) שמקבלת כפרמטר מספר x ומתוארת בהמשך.

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה P1(n,m) כתלות ב- n ו- m (במונחים של ה- O הקטן ביותר שאתה/את יודע/ת להשיג).

```
P1(n,m)
-------
y=0
for (i = 1; i ≤ n²; i++) {
  for (j = 1; j ≤ 2^(m²) ; j=j·2) {
     y=y+F(i)·F(j)
  }
}
return y


F(x)
-------
if (x≤1) {return 1}
s=0
for (i = 1; i ≤ x²; i++)
   {
     s=s+i
   }
return  s+F(x/2)+F(x/3)+F(x/4)
```

פתרון שאלה 1

נסמן ב- $T_F(x)$ את זמן ביצוע הפונקציה F(x) כתלות בפרמטר x.
מניתוח הקוד נקבל את נוסחת הנסיגה הבאה:

$$(1) \quad T_F(x) \le C_1 + C_2 \cdot x^2 + T_F(\frac{x}{2}) + T_F(\frac{x}{3}) + T_F(\frac{x}{4})$$

במקרה הזה ניתן להשתמש במסטר כפי שיודגם להלן
ולהגיע ל- θ ולכן אין צורך להפעיל את שיטת עץ הרקורסיה.

מ- (1) נובע ש-

$$(2) \quad T_F(x) \le C_1 + C_2 \cdot x^2 + 3T_F(\frac{x}{2})$$

נפעיל את שיטת המסטר: $a=3$ $b=2$

מאחר ו- $x^{\log_b a} = x^{\log_2 3} < C_1 + C_2 \cdot x^2$

נקבל לפי משפט המסטר ש-

$$(3) \quad T_F(x) = O(x^2)$$

ה- O הנ"ל הוא הטוב ביותר שאפשר להשיג כי מצד שני מתקיים ש-

$$(4) \quad T_F(x) \ge x^2 = \theta(x^2)$$

ולכן,

$$(5) \quad T_F(x) = \Omega(x^2)$$

לכן לפי הגדרת O קיימים קבועים D ו- N_0 כך שלכל $x \ge N_0$ מתקיים:

$$(6) \quad T_F(x) \le D \cdot x^2$$

נסמן ב- T(n,m) את זמן ביצוע הפונקציה P1(n,m) כתלות בפרמטרים n ו- m. נסמן ב- A את סך כל זמן הביצוע של פונקצית העזר.

בשיטות שהראנו במטלה 3 נקבל שמספר הפעמים שנכנסים ללולאה הפנימית עבור כל ערך של i הוא m^2+1 ולכן סך הכל נכנסים ללולאה הפנימית $n^2\cdot(m^2+1)$ פעמים.

לכן:

$$(7)\quad T(n,m)=C_1+C_2\cdot n^2+C_3\cdot n^2\cdot(m^2+1)+A$$

נחשב את A

עבור $i=1, j=1$ קוראים לפונקציה F(1) ולפונקציה F(1)

עבור $i=1, j=2$ קוראים לפונקציה F(1) ולפונקציה F(2)

עבור $i=1, j=2^2$ קוראים לפונקציה F(1) ולפונקציה $F(2^2)$

...

עבור $i=1, j=2^{m^2}$ קוראים לפונקציה F(1) ולפונקציה $F(2^{m^2})$

עבור $i=2, j=1$ קוראים לפונקציה F(2) ולפונקציה F(1)

עבור $i=2, j=2$ קוראים לפונקציה F(2) ולפונקציה F(2)

עבור $i=2, j=2^2$ קוראים לפונקציה F(2) ולפונקציה $F(2^2)$

...

עבור $i=2, j=2^{m^2}$ קוראים לפונקציה F(2) ולפונקציה $F(2^{m^2})$

...

עבור $i=n^2, j=1$ קוראים לפונקציה $F(n^2)$ ולפונקציה F(1)

עבור $i=2, j=2$ קוראים לפונקציה $F(n^2)$ ולפונקציה F(2)

עבור $i=n^2, j=2^2$ קוראים לפונקציה $F(n^2)$ ולפונקציה $F(2^2)$

...

עבור $i=n^2, j=2^{m^2}$ קוראים לפונקציה $F(n^2)$ ולפונקציה $F(2^{m^2})$

לכן בסך הכל נקבל ש-

$$A=n^2\cdot(T_F(1)+T_F(2)+T_F(2^2)+\ldots+T_F(2^{m^2}))+(m^2+1)\cdot(T_F(1)+T_F(2)+\ldots+T_F(n^2))$$

נציב בשוויון הנ"ל את אי שוויון (6) ונקבל:

$$(8)\quad A \le D\cdot n^2\cdot(1^2+2^2+(2^2)^2+(2^3)^2 \ldots+(2^{m^2})^2) + D\cdot(m^2+1)\cdot(1^2+2^2+\ldots+(n^2)^2)$$

כדי להעריך את הביטוי האחרון נשים לב ש-

$(a^b)^c=(a^c)^b$

ולכן למשל:

$(2^3)^2=(2^2)^3$

$(2^4)^2=(2^2)^4$

$(2^{m^2})^2=(2^2)^{m^2}$

ולכן (8) שקול ל-

$$(9)\quad A \le D\cdot n^2\cdot(1+2^2+(2^2)^2+(2^2)^3 \ldots+(2^2)^{m^2}) + D\,(m^2+1)\cdot(1^2+2^2+\ldots+(n^2)^2)$$

ששקול ל-

$$(10)\quad A \le D\cdot n^2\cdot\frac{(2^2)^{m^2+1}-1}{2^2-1} + D\cdot(m^2+1)\cdot\frac{1}{6}\cdot n^2\cdot(n^2+1)\cdot(2n^2+1)=\theta(n^2\cdot 4^{m^2}+n^6\cdot m^2)$$

ולכן הראנו ש-

$$(11)\quad A=O(n^2\cdot 4^{m^2}+n^6\cdot m^2)$$

מ- (7) ו- (11) נקבל ש-

$$(12)\quad T(n,m)=O(n^2\cdot 4^{m^2}+n^6\cdot m^2)$$

.2

שאלה זו הופיעה במבחן מועד ב בשנת 2016

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם P2(n,m) שמקבלת כפרמטר מספרים m ו- n. הפונקציה קוראת לפונקצית עזר בשם F(x) שמקבלת כפרמטר מספר x ומתוארת בהמשך.

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה P2(n,m) כתלות ב- n ו- m עבור המקרה שבו $n^2 \le m$ (במונחים של ה- O הקטן ביותר שאתה/את יודע/ת להשיג).

```
P2(n,m)
-------
y=0
for (i = 1; i ≤ n²; i++) {
  for (j = i; j ≤ m; j++) {
     y=y+F(i)
     if (i==1) { y=y·F(j²) }
  }
}
return y
```

```
F(x)
-------
if (x≤1) {return 1}
s=0
for (i = 1; i ≤ x; i++)
   {
     s=s+i
   }
return  s+F(x/2)+F(x/4)
```

פתרון שאלה 2

נסמן ב- $T_F(x)$ את זמן ביצוע הפונקציה $F(x)$ כתלות בפרמטר x.
מניתוח הקוד נקבל את נוסחת הנסיגה הבאה:

$$(1)\quad T_F(x) \le C_1 + C_2 \cdot x + T_F(\frac{x}{2}) + T_F(\frac{x}{4})$$

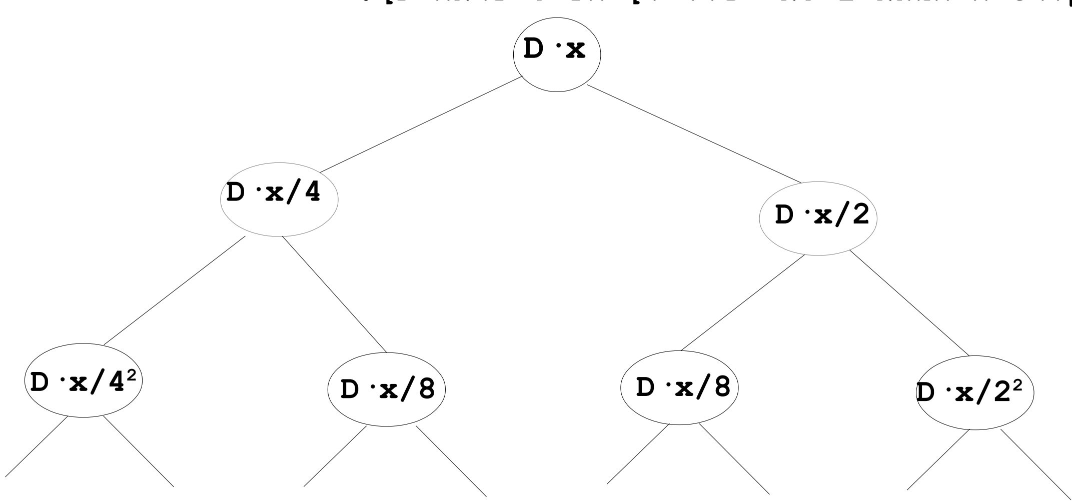
במקרה הזה לא ניתן להשתמש במשפט המסטר כי בשימוש במשפט המסטר יוצא שה- O וה- Ω שונים.

לכן נפעיל שיטת עץ רקורסיה.

לפני כן נעביר את המשוואה לצורה:

$$(2)\quad T_F(x) \le D \cdot x + T_F(\frac{x}{2}) + T_F(\frac{x}{4})$$

עץ הרקורסיה המתאים לאי שוויון הנ"ל נראה כך:



סכום האיברים ברמה הראשונה בעץ הוא: $D \cdot x$

סכום האיברים ברמה השניה בעץ הוא: $D \cdot \frac{3}{4} \cdot x$

סכום האיברים ברמה השלישית בעץ הוא: $D \cdot (\frac{3}{4})^2 \cdot x$

ולכן:

$$T_F(x) \le D \cdot x + D \cdot \frac{3}{4} \cdot x + D \cdot (\frac{3}{4})^2 \cdot x + \ldots = D \cdot x \cdot (1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \ldots) = D \cdot x \cdot \frac{1}{(1-3/4)} = \theta(x)$$

ולכן נקבל: $T_F(x)=O(x)$

מאחר ו- $T_F(x)\geq x=\theta(x)$

נקבל: $T_F(x)=\Omega(x)$

ולכן נקבל: $T_F(x)=\theta(x)$

לכן לפי הגדרת θ קיימים קבועים D_2 ו- N_0 כך שלכל $x\geq N_0$ מתקיים אי השוויון הבא:

$$(3)\quad T_F(x)\leq D_2\cdot x$$

נסמן ב- $T(n,m)$ את זמן ביצוע הפונקציה $P2(n,m)$ כתלות בפרמטרים n ו- m. נטפל במקרה ש- $n^2\leq m$. נסמן ב- A את סך כל זמן הביצוע של פונקצית העזר.

נסמן ב- z את מספר הפעמים שנכנסים ללולאה הפנימית.

נקבל ש-

$$(4)\quad T(n,m)=C_1+C_2\cdot n^2+C_3\cdot z+A$$

נחשב את z

עבור $i=1$ נכנסים ללולאה הפנימית $m-1+1$ פעמים

עבור $i=2$ נכנסים ללולאה הפנימית $m-2+1$ פעמים

...

עבור $i=n^2$ נכנסים ללולאה הפנימית $m-n^2+1$ פעמים

בסך הכל נקבל ש-

$$z=(m-1+1)+(m-2+1)+\ldots(m-n^2+1)=n^2\cdot(m+1)-(1+2+\ldots n^2)$$

ששקול ל-

$$z=n^2\cdot(m+1)-\frac{1}{2}\cdot n^2\cdot(n^2+1)$$

נציב את z ב- (4) ונקבל:

$$(5)\quad T(n,m)=C_1+C_2\cdot n^2+C_3\cdot\left(n^2\cdot(m+1)-\frac{1}{2}\cdot n^2\cdot(n^2+1)\right)+A$$

נחשב את A

עבור $i=1,j=1$ קוראים לפונקציה F(1) ולפונקציה $F(1^2)$

עבור $i=1,j=2$ קוראים לפונקציה F(1) ולפונקציה $F(2^2)$

...

עבור $i=1,j=m$ קוראים לפונקציה F(1) ולפונקציה $F(m^2)$

עבור $i=2,j=2$ קוראים לפונקציה F(2)

עבור $i=2,j=3$ קוראים לפונקציה F(2)

...

עבור $i=2,j=m$ קוראים לפונקציה F(2)

...

עבור $i=n^2,j=n^2$ קוראים לפונקציה $F(n^2)$

...

עבור $i=n^2,j=m$ קוראים לפונקציה $F(n^2)$

לכן בסך הכל נקבל ש-

$$A=T_F(1^2)+T_F(2^2)+\ldots+T_F(m^2)+(m-1+1)\cdot T_F(1)+(m-2+1)\cdot T_F(2)+\ldots+(m-n^2+1)\cdot T_F(n^2)$$

מהשוויון האחרון ומ- (3) נקבל ש-

$$A\le D_2\cdot(1^2+2^2+\ldots+m^2+(m-1+1)\cdot 1+(m-2+1)\cdot 2+\ldots+(m-n^2+1)\cdot n^2)$$

ששקול ל-

$$A\le D_2\cdot(\frac{1}{6}\cdot m\cdot(m+1)\cdot(2m+1)+(m+1)\cdot(1+2+\ldots n^2)-(1^2+2^2+\ldots(n^2)^2))$$

ששקול ל-

$$A\le D_2\cdot(\frac{1}{6}\cdot m\cdot(m+1)\cdot(2m+1)+(m+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot n^2\cdot(n^2+1)-\frac{1}{6}\cdot n^2\cdot(n^2+1)\cdot(2n^2+1))=\theta(m^3)$$

נזכיר שהניתוח הנ"ל הוא עבור המקרה ש- $m\ge n^2$

ולכן הראנו ש-

$$(6)\quad A=O(m^3)$$

מ- (5) ו- (6) נקבל ש-

$$(7)\quad T(n,m)=O(m^3)$$

3.

נתונה נוסחת הנסיגה הבאה:

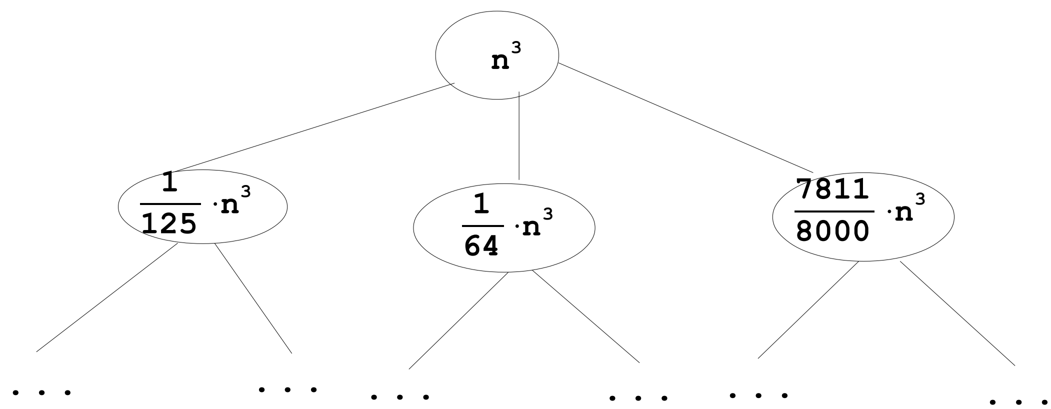
$$T(n)=T\left(\frac{n}{4}\right)+T\left(\frac{n}{5}\right)+T\left(\frac{\sqrt[3]{7811}\cdot n}{20}\right)+n^{3}$$

כאשר $T(i)=0$ עבור $i<1$.

הערך את $T(n)$ במונחים של Θ. נמק/י את תשובתך.

<u>פתרון שאלה 3</u>

עץ הרקורסיה המתאים לנוסחת הנסיגה הנ"ל נראה כך:



סכום האיברים ברמה הראשונה בעץ הוא: n^3

סכום האיברים ברמה השניה בעץ הוא: n^3

סכום האיברים ברמה השלישית בעץ הוא: n^3

וכן הלאה.

נסמן ב- x את מספר הרמות בעץ.

(1) $T(n)\le n^3\cdot x$

האיבר הימני ביותר ברמה 1 בעץ התקבל כתוצאה מהצבה של $T(n)$ בנוסחת הנסיגה.

האיבר הימני ביותר ברמה 2 בעץ התקבל כתוצאה מהצבה של $T\left(\frac{\sqrt[3]{7811}}{20}\cdot n\right)$ בנוסחת הנסיגה.

האיבר הימני ביותר ברמה 3 בעץ התקבל כתוצאה מהצבה של $T((\frac{\sqrt[3]{7811}}{20})^2 \cdot n)$ בנוסחת הנסיגה.

...

האיבר הימני ביותר ברמה x בעץ התקבל כתוצאה מהצבה של $T((\frac{\sqrt[3]{7811}}{20})^{x-1} \cdot n)$ בנוסחת הנסיגה.

מאחר והאיבר הימני ביותר ברמה x בעץ גדול מ- 0 הוא התקבל כתוצאה מהצבה של מספר שגדול או שווה ל- 1 בנוסחת הנסיגה. ולכן:

$$(\frac{\sqrt[3]{7811}}{20})^{x-1} \cdot n \geq 1$$

ששקול ל-

$$n \geq (\frac{20}{\sqrt[3]{7811}})^{x-1}$$

ששקול ל-

(3) $\mathbf{x-1} \leq \log_{\frac{20}{\sqrt[3]{7811}}} \mathbf{n}$

ששקול ל-

(4) $\mathbf{x} \leq \mathbf{1} + \log_{\frac{20}{\sqrt[3]{7811}}} \mathbf{n}$

מ- (4) ו- (1) נקבל:

(5) $\mathbf{T}(\mathbf{n}) \leq \mathbf{n}^3 \cdot (\mathbf{1} + \log_{\frac{20}{\sqrt[3]{7811}}} \mathbf{n}) = \theta(\mathbf{n}^3 \cdot \log \mathbf{n})$

ולכן הראנו ש-

(6) $\mathbf{T}(\mathbf{n}) = O(\mathbf{n}^3 \cdot \log \mathbf{n})$

לכוון השני, נסמן ב- y את מספר הרמות המלאות בעץ.

(7) $\mathbf{T}(\mathbf{n}) \geq \mathbf{n}^3 \cdot \mathbf{y}$

האיבר הקטן ביותר ברמה y הוא השמאלי ביותר והתקבל כתוצאה מהצבה של $T((\frac{1}{5})^{y-1} \cdot n)$ בנוסחת הנסיגה.

אם היה איבר ברמה y+1 אז האיבר הקטן ביותר ברמה y+1 היה מתקבל כתוצאה מחישוב של $T((\frac{1}{5})^{y} \cdot n)$ אבל האיבר הזה לא קיים ולכן מה שבתוך ה- T בנוסחה האחרונה חייב להיות קטן מ- 1:

ולכן נקבל:

$$(\frac{1}{5})^{y} \cdot n < 1$$

ששקול ל-

$$n < 5^{y}$$

ששקול ל-

$$(8)\ \ y > \log_5 n$$

מ- (7) ו- (8) נקבל:

$$(9)\quad T(n) \geq n^3 \cdot \log_5 n = \theta(n^3 \cdot \log n)$$

ולכן הראנו ש-

$$(10)\quad T(n) = \Omega(n^3 \cdot \log n)$$

מ- (6) ו- (10) נקבל:

$$(11)\quad T(n) = \theta(n^3 \cdot \log n)$$

4.

עבור נוסחאות הנסיגה הבאות השתמש/י במשפט ה- master כדי להעריך את T(n) במונחים של θ. נמק/י את תשובתך. אם לא ניתן להשתמש במשפט ה- master ציין/צייני את הסיבה (במקרה זה אין צורך להעריך את T(n)).

א)

$$T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + \sqrt{n}\ (\log_2 n)^3$$

<u>פתרון שאלה 4 סעיף א</u>

ננתח לפי משפט המסטר ונקבל:

a=3 b=2

$f(n)=\sqrt{n}\cdot(\log_2 n)^3$ $\qquad n^{\log_b a}=n^{\log_2 3}$

ולכן לפי משפט המסטר (מקרה 1) נסיק:

$T(n)=\theta(n^{\log_2 3})$

ב)

$$T(n) = 10\cdot T(\frac{2n}{3}) + n^{2.1} + n^2(\log_2 n)^8$$

<u>פתרון שאלה 4 סעיף ב</u>

ננתח לפי משפט המסטר ונקבל:

a=10 b=3/2

$f(n)=n^{2.1}+n^2\cdot(\log_2 n)^8$ $\qquad n^{\log_b a}=n^{\log_{3/2} 10}$

ולכן לפי משפט המסטר (מקרה 1) נסיק:

$T(n)=\theta(n^{\log_{3/2} 10})$

ג)

$$T(n) = T(\frac{n^3}{3}) + n$$

<u>פתרון שאלה 4 סעיף ג</u>

לא ניתן להשתמש במשפט המסטר במקרה זה כי האיבר $T(\frac{n^3}{3})$ אינו מהצורה $a \cdot T(\frac{n}{b})$.

ד)

$$T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{\sqrt{1.3}}) + n^2$$

<u>פתרון שאלה 4 סעיף ד</u>

ננתח לפי משפט המסטר ונקבל:

$a=2, b=\sqrt{1.3}$

$f(n)=n^2 \qquad n^{\log_b a}=n^{\log_{\sqrt{1.3}} 2}$

ולכן לפי משפט המסטר (מקרה 1) נסיק:

$T(n)=\theta(n^{\log_{\sqrt{1.3}} 2})$

ה)

$$T(n) = 4 \cdot T(\frac{n}{3.3}) + n\log_2 n$$

<u>פתרון שאלה 4 סעיף ה</u>

ננתח לפי משפט המסטר ונקבל:

a=4 b=3.3

$f(n)=n \cdot \log_2 n \qquad n^{\log_b a}=n^{\log_{3.3} 4}$

ולכן לפי משפט המסטר (מקרה 1) נסיק:

$T(n)=\theta(n^{\log_{3.3} 4})$

ו)

$$T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{5}\right) + \sqrt{\frac{n}{2}}$$

<u>פתרון שאלה 4 סעיף ו</u>

ננתח לפי משפט המסטר ונקבל:

a=3 b=5

$$f(n)=\sqrt{\frac{n}{2}} \qquad n^{\log_b a}=n^{\log_5 3}$$

ולכן לפי משפט המסטר (מקרה 1) נסיק:

$$T(n)=\theta\left(n^{\log_5 3}\right)$$

ז)

$$T(n) = 1.5 \cdot T\left(\frac{n}{n+1}\right) + n^3 + n^2$$

<u>פתרון שאלה 4 סעיף ז</u>

לא ניתן להשתמש במשפט המסטר במקרה זה כי האיבר $1.5 \cdot T\left(\frac{n}{n+1}\right)$

אינו מהצורה $a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right)$ עבור $b>1$.

ח)

$$T(n) = 2 \cdot T(n-6) + n^3$$

<u>פתרון שאלה 4 סעיף ח</u>

לא ניתן להשתמש במשפט המסטר במקרה זה כי האיבר $2 \cdot T(n-6)$

אינו מהצורה $a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right)$ עבור $b>1$.