ביה"ס למדעי המחשב ומתמטיקה האקדמית נתניה
סמסטר ב' תשע"ח

14.4.2018

# מבני נתונים
## פתרון תרגיל מס' 4

**1.** שאלה זו הופיעה במבחן מועד א 2017 (מיוחד לפרחי הי טק)

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם P1(n,m) שמקבלת כפרמטר מספרים m ו- n. הפונקציה קוראת לפונקצית עזר בשם F(x) שמקבלת כפרמטר מספר x ומתוארת בהמשך.

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה P1(n,m) כתלות ב- n ו- m (במונחים של ה- O הקטן ביותר שאתה/את יודע/ת להשיג).

```
P3(n,m)
-------
y=0
for (i = 1; i ≤  2n^2 ; i++) {
  if (i==1) {
     for (j = 1; j ≤  n·2^m ; j++) {
        y=y+F(j)*F(n^2)
     }
  }
  y=y+F(i)*F( 2^m )
  }
}
return y

F(x)
-------
if (x≤1) {return 1}
s=0
for (i = 1; i ≤ x^2; i++)
   {
     s=s+i
   }
return  s+F(x/3)+F(x/2)+F(x/12)
```

<u>פתרון שאלה 1</u>

נסמן ב- $T_F(x)$ את זמן ביצוע הפונקציה F(x) כתלות בפרמטר x.

$$(1)\quad T_F(x) \le C_1 + C_2 \cdot x^2 + T_F(x/3) + T_F(x/2) + T_F(x/12)$$

מ- (1) נקבל:

$$(2)\quad T_F(x) \le C_1 + C_2 \cdot x^2 + 3T_F(x/2)$$

נפעיל את משפט המסטר: $a=3, b=2$

$x^{\log_2 3} < x^2$

ולכן ממשפט המסטר נקבל: $T_F(x) = O(x^2)$

מצד שני מאחר ו- $T_F(x) \ge x^2$ נקבל ש- $T_F(x) = \Omega(x^2)$

ולכן נקבל ש- $T_F(x) = \theta(x^2)$

לכן לפי הגדרת $\theta$ קיימים קבועים D ו- $N_0$ כך שלכל $x \ge N_0$ מתקיים:

$$(3)\quad T_F(x) \le D \cdot x^2$$

נסמן ב- T(n,m) את זמן ביצוע הפונקציה P1(n,m) כתלות בפרמטרים n ו- m. הפנימית, נסמן ב- A את סך כל זמן הביצוע של פונקצית העזר בקריאות מהלולאה הפנימית ונסמן ב- B את סך כל הקריאות לפונקצית העזר בקריאות מהלולאה החיצונית.
מאחר וללולאה הפנימית נכנסים רק עבור המקרה ש- i=1 נקבל שללולאה הפנימית נכנסים $n \cdot 2^m$ פעמים, ולכן:

$$(4)\quad T(n,m) = C_1 + C_2 \cdot 2n^2 + C_3 \cdot n \cdot 2^m + A + B$$

נחשב את **A**

עבור i=1,j=1 קוראים לפונקציה $F(1)$ ולפונקציה $F(n^2)$

עבור i=1,j=2 קוראים לפונקציה $F(2)$ ולפונקציה $F(n^2)$

...

עבור $i=1, j=n \cdot 2^m$ קוראים לפונקציה $F(n \cdot 2^m)$ ולפונקציה $F(n^2)$

עבור $i>1$ לא נכנסים ללולאה הפנימית ולכן לא קוראים לפונקצית העזר.
ולכן,

$$A=(T_F(1)+T_F(n^2))+(T_F(2)+T_F(n^2))\ \ldots+(T_F(n\cdot 2^m)+T_F(n^2))=$$
$$=n\cdot 2^m\cdot T_F(n^2)+T_F(1)+T_F(2)+\ \ldots+T_F(n\cdot 2^m)\le$$
$$\le D\cdot[\,n\cdot 2^m\cdot(n^2)^2+1^2+2^2+\ \ldots+(n\cdot 2^m)^2\,]=$$

$$=D\cdot[\,n^5\cdot 2^m+1/6\cdot n\cdot 2^m\cdot(n\cdot 2^m+1)\cdot(2(n\cdot 2^m)+1)\,]=\theta(n^5\cdot 2^m+n^3\cdot 2^{3m})$$

לסיכום הראנו ש-

$$(5)\quad A=\theta(n^5\cdot 2^m+n^3\cdot 2^{3m})$$

נחשב את B

עבור $i=1$ קוראים לפונקציה $F(1)$ ולפונקציה $F(2^m)$

עבור $i=2$ קוראים לפונקציה $F(2)$ ולפונקציה $F(2^m)$

...

עבור $i=2n^2$ קוראים לפונקציה $F(2n^2)$ ולפונקציה $F(2^m)$

עבור $i>2n^2$ לא נכנסים ללולאה החיצונית ולכן לא קוראים לפונקצית העזר.
ולכן,

$$B=(T_F(1)+T_F(2^m))+(T_F(2)+T_F(2^m))\ \ldots+(T_F(2n^2)+T_F(2^m))=$$
$$=2n^2\cdot T_F(2^m)+T_F(1)+T_F(2)+\ \ldots+T_F(2n^2)\le$$
$$\le D\cdot[\,2n^2\cdot(2^m)^2\ +1^2+2^2+\ \ldots+(2n^2)^2\,]=$$

$$=D\cdot[\,2n^2\cdot(2^m)^2+1/6\cdot 2n^2\cdot(2n^2+1)\cdot(2(2n^2)+1)\,]=\theta(n^6+n^2\cdot 2^{2m})$$

לסיכום הראנו ש-

$$(6)\quad B=\theta(n^6+n^2\cdot 2^{2m})$$

מ- (4-6) נקבל:

$$(7)\quad T(n,m)=O(n^6+n^5\cdot 2^m+n^3\cdot 2^{3m})$$

**.2**

נתונה נוסחת הנסיגה הבאה:

$$T(n)=T\left(\frac{n}{6}\right)+\ 4T\left(\frac{n}{5}\right)+\ T\left(\frac{n}{7}\right)+\ 3n$$

כאשר $T(n)=0$ עבור $n<1$.

איזה מהאפשרויות הבאות מתקיימות? (יתכן ומתקיימת יותר מאפשרות אחת) הוכח/הוכיחי את תשובתך.

א. $T(n)=O(n\cdot\log n)$

ב. $T(n)=\Omega(n^2)$

ג. $T(n)=\theta(n\cdot\log n)$

ד. $T(n)=\theta(n)$

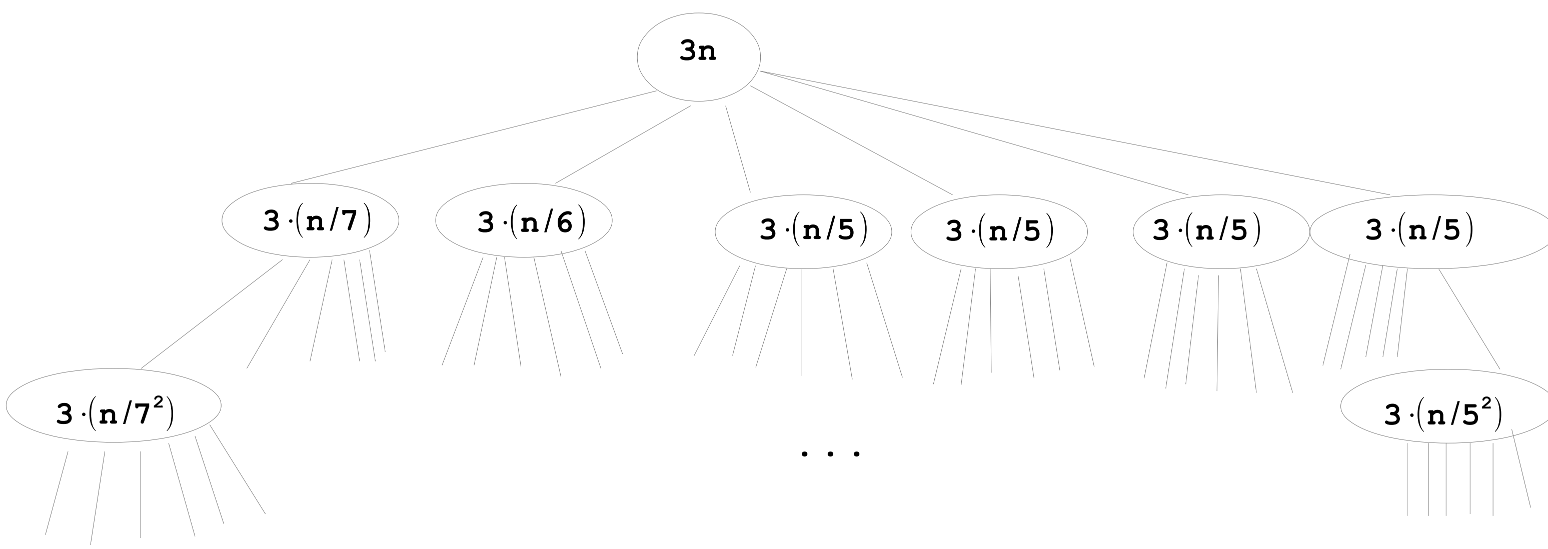
ה. $T(n)=\theta(n^2)$

ו. אף אחת מהתשובות אינה נכונה.

<u>הערה</u> להוכחת התשובה, אם צריך אז יש להשתמש בעץ רקורסיה. בנוסף לכך אפשר להעריך את הסיבוכיות לפי הכללים שרשומים בעמוד 17 בחוברת (קשרים בין פונקציות סטנדרטיות) ללא צורך להוכיח אותם.

<u>פתרון שאלה 2</u>

עץ הרקורסיה המתאים לשוויון הנ"ל נראה כך:




נסמן ב- q את המספר שמתקבל מהחישוב הבא:

$$(1)\ q=(1/5)+(1/5)+(1/5)+(1/5)+(1/6)+(1/7)=233/210$$

סכום האיברים ברמה הראשונה שווה ל $3n$

סכום האיברים ברמה השניה בעץ שווה ל $3n\cdot q$

סכום האיברים ברמה השלישית $3n \cdot q^2$

וכן הלאה.

נסמן ב- **x** את מספר הרמות בעץ.

לכן נקבל ש-

(2) $T(n) \le 3n \cdot (1+q+q^2+\ldots+q^{x-1})$

האיבר הימני ביותר ברמה 1 בעץ התקבל כתוצאה מהצבה של $T(n)$ בנוסחת הנסיגה.

האיבר הימני ביותר ברמה 2 בעץ התקבל כתוצאה מהצבה של $T(n/5)$ בנוסחת הנסיגה.

האיבר הימני ביותר ברמה 3 בעץ התקבל כתוצאה מהצבה של $T(n/5^2)$ בנוסחת הנסיגה.

...

האיבר הימני ביותר ברמה x בעץ התקבל כתוצאה מהצבה של $T(n/5^{x-1})$ בנוסחת הנסיגה.

מאחר והאיבר הימני ביותר ברמה x בעץ גדול מ- 0 הוא התקבל כתוצאה מהצבה של מספר שגדול או שווה ל- 1 בנוסחת הנסיגה.
ולכן:

$n/5^{x-1} \ge 1$

ששקול ל-

$n \ge 5^{x-1}$

ששקול ל-

$x - 1 \le \log_5 n$

ששקול ל-

(3) $x \le 1 + \log_5 n$

מ- (2) ו- (3) נקבל:

(4) $T(n) \le 3n \cdot (1+q+q^2+\ldots+q^{\log_5 n})$

ששקול ל-

(5) $T(n) \le 3n \cdot (q^{\log_5 n+1}-1)/(q-1)$

ולכן:

(6) $T(n) \le 3n \cdot (q^{\log_5 n+1})/(q-1)$

ששקול ל-

$$(7)\quad T(n)\le 3n\cdot(q/(q-1))\cdot(q^{\log_5 n})$$

ששקול ל-

$$(8)\quad T(n)\le 3n\cdot(q/(q-1))\cdot(q^{\frac{\log_q n}{\log_q 5}})$$

ששקול ל-

$$(9)\quad T(n)\le 3n\cdot(q/(q-1))\cdot(n^{\frac{1}{\log_q 5}})=\theta(n^{1+\frac{1}{\log_q 5}})$$

ולכן הראנו ש-

$$(10)\quad T(n)=O(n^{1+\frac{1}{\log_q 5}})$$

כאשר q הוא הערך שחושב ב- (1).

נסמן ב- y את מספר הרמות המלאות.

האיבר השמאלי ביותר ברמה 1 בעץ התקבל כתוצאה מהצבה של $T(n)$ בנוסחת הנסיגה.

האיבר השמאלי ביותר ברמה 2 בעץ התקבל כתוצאה מהצבה של $T(n/7)$ בנוסחת הנסיגה.

האיבר השמאלי ביותר ברמה 3 בעץ התקבל כתוצאה מהצבה של $T(n/7^2)$ בנוסחת הנסיגה.

...

האיבר השמאלי ביותר ברמה y בעץ התקבל כתוצאה מהצבה של $T(n/7^{y-1})$ בנוסחת הנסיגה.

האיבר השמאלי ביותר ברמה y+1 בעץ התקבל כתוצאה מהצבה של $T(n/7^{y})$ בנוסחת הנסיגה.

מאחר והאיבר השמאלי ביותר ברמה y+1 בעץ לא קיים, דהינו הוא שווה ל- 0 הוא התקבל כתוצאה מהצבה של מספר שקטן מ-1 בנוסחת הנסיגה. ולכן:

$$n/7^y<1$$

ששקול ל-

$$n<7^y$$

ששקול ל-

$$(11)\quad y>\log_7 n$$

מאחר ו- T(n) גדול או שווה לסכום הרמות המלאות בעץ נקבל:

$$(12)\quad T(n) \geq 3n \cdot (1+q+q^2+ \ldots +q^{y-1})$$

מ- (11) ו- (12) נקבל:

$$(13)\quad T(n) > 3n \cdot (1+q+q^2+ \ldots +q^{\log_7 n})$$

ששקול ל-

$$(14)\quad T(n) > 3n \cdot (q^{\log_7 n+1}-1)/(q-1)$$

ששקול ל-

$$(15)\quad T(n) > 3n \cdot (q^{\log_7 n+1})/(q-1)-3n/(q-1)$$

ששקול ל-

$$(16)\quad T(n) > 3n \cdot (q/(q-1)) \cdot (q^{\log_7 n})-3n/(q-1)$$

ששקול ל-

$$(17)\quad T(n) > 3n \cdot (q/(q-1)) \cdot (q^{\frac{\log_q n}{\log_q 7}})-3n/(q-1)$$

ששקול ל-

$$(18)\quad T(n) > 3n \cdot (q/(q-1)) \cdot (n^{\frac{1}{\log_q 7}})-3n/(q-1)=\theta(n^{1+\frac{1}{\log_q 7}})$$

ולכן הראנו ש-

$$(19)\quad T(n)=\Omega(n^{1+\frac{1}{\log_q 7}})$$

כאשר q הוא הערך שחושב ב- (1).

נעבור על האפשרויות השונות:

א. $T(n)=O(n \cdot \log n)$ לא מתקים כי הוא בסתירה ל- (19)

ב. $T(n)=\Omega(n^2)$ לא מתקים כי הוא בסתירה ל- (10)

ג. $T(n)=\theta(n \cdot \log n)$ לא מתקים כי הוא בסתירה ל- (19)

ד. $T(n)=\theta(n)$ לא מתקים כי הוא בסתירה ל- (19)

ה. $T(n)=\theta(n^2)$ לא מתקים כי הוא בסתירה ל- (10)

ו. אף אחת מהתשובות אינה נכונה. זו התשובה הנכונה כי הראנו שכל שאר התשובות לא נכונות.

### 3.

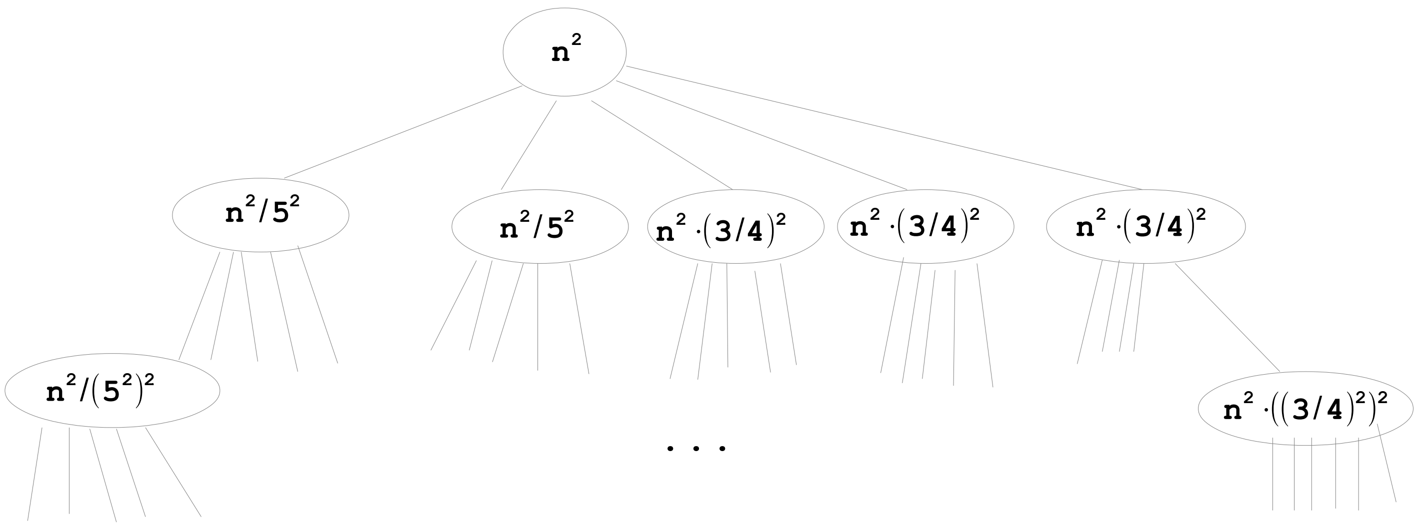
נתונה נוסחת הנסיגה הבאה:

$$T(n)=2T\left(\frac{n}{5}\right)+3T\left(\frac{3n}{4}\right)+n^2$$

העריכי את T(n) במונחים של ה- O הקטן ביותר שאתה/את יודע/ת להשיג.

**<u>פתרון שאלה 3</u>**

עץ הרקורסיה המתאים לשוויון הנ"ל נראה כך:




נסמן ב- q את המספר שמתקבל מהחישוב הבא:

(1) $q=(1/5^2)+(1/5^2)+(3/4)^2+(3/4)^2+(3/4)^2=707/400$

סכום האיברים ברמה הראשונה שווה ל $n^2$

סכום האיברים ברמה השניה בעץ שווה ל $n^2\cdot q$

סכום האיברים ברמה השלישית $n^2\cdot q^2$

וכן הלאה.

נסמן ב- x את מספר הרמות בעץ.

לכן נקבל ש-

(2) $T(n)\le n^2\cdot(1+q+q^2+\ldots+q^{x-1})$

האיבר הימני ביותר ברמה 1 בעץ התקבל כתוצאה מהצבה של $T(n)$ בנוסחת הנסיגה.

האיבר הימני ביותר ברמה 2 בעץ התקבל כתוצאה מהצבה של $T(n\cdot 3/4)$ בנוסחת הנסיגה.

האיבר הימני ביותר ברמה 3 בעץ התקבל כתוצאה מהצבה של $T(n\cdot(3/4)^2)$ בנוסחת הנסיגה.

...

האיבר הימני ביותר ברמה x בעץ התקבל כתוצאה מהצבה של $T(n\cdot(3/4)^{x-1})$ בנוסחת הנסיגה.

מאחר והאיבר הימני ביותר ברמה x בעץ גדול מ- 0 הוא התקבל כתוצאה מהצבה של מספר שגדול או שווה ל- 1 בנוסחת הנסיגה.
ולכן:

$$n\cdot(3/4)^{x-1}\geq 1$$

ששקול ל-

$$n\geq(4/3)^{x-1}$$

ששקול ל-

$$x-1\leq\log_{4/3}n$$

ששקול ל-

$$(3)\quad x\leq 1+\log_{4/3}n$$

מ- (2) ו- (3) נקבל:

$$(4)\qquad T(n)\leq n^2\cdot\left(1+q+q^2+\ldots+q^{\log_{4/3}n}\right)$$

ששקול ל-

$$(5)\qquad T(n)\leq n^2\cdot\left(q^{\log_{4/3}n+1}-1\right)/(q-1)$$

ולכן:

$$(6)\qquad T(n)\leq n^2\cdot\left(q^{\log_{4/3}n+1}\right)/(q-1)$$

ששקול ל-

$$(7)\qquad T(n)\leq n^2\cdot(q/(q-1))\cdot\left(q^{\log_{4/3}n}\right)$$

ששקול ל-

$$(8)\qquad T(n)\leq n^2\cdot(q/(q-1))\cdot\left(q^{\frac{\log_q n}{\log_q 4/3}}\right)$$

ששקול ל-

$$(9)\quad T(n)\le n^2\cdot(q/(q-1))\cdot(n^{\frac{1}{\log_q 4/3}})=\theta(n^{2+\frac{1}{\log_q 4/3}})$$

ולכן הראנו ש-

$$(10)\quad T(n)=O(n^{2+\frac{1}{\log_q 4/3}})$$

כאשר q הוא הערך שחושב ב- (1).

**4.**

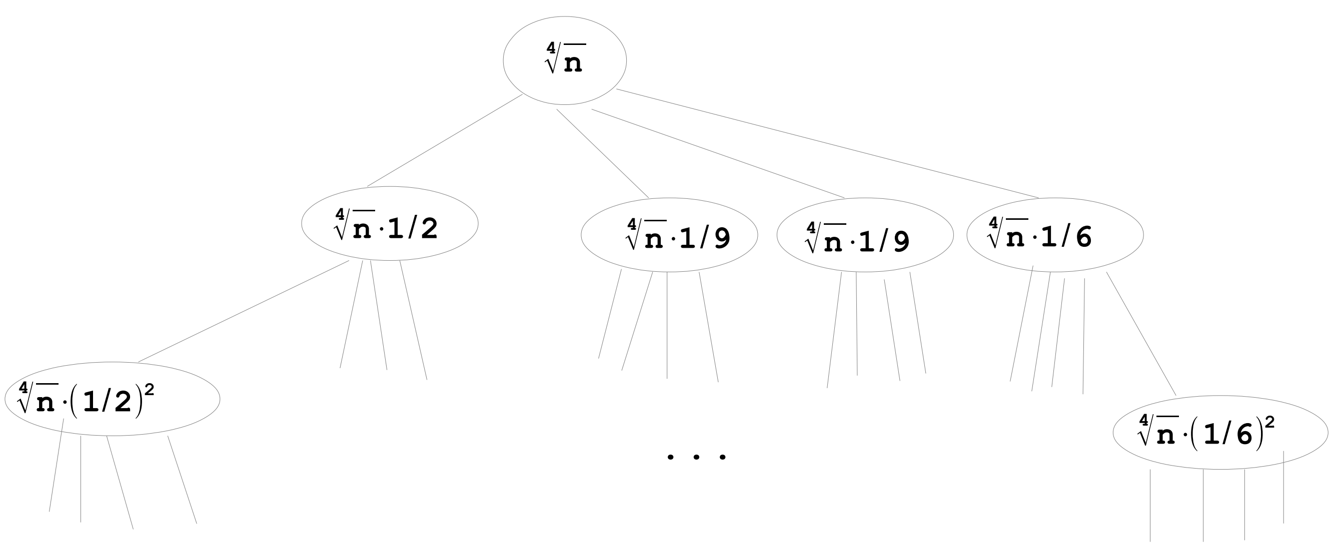
נתונה נוסחת הנסיגה הבאה:

$$T(n)=T(\frac{n}{16})+2T(\frac{n}{81^2})+T(\frac{n}{36^2})+\sqrt[4]{n}$$

הערך/העריכי את T(n) במונחים של $\theta$ .

<u>פתרון שאלה 4</u>

עץ הרקורסיה המתאים לשוויון הנ"ל נראה כך:




נסמן ב- q את המספר שמתקבל מהחישוב הבא:

(1) $q=1/2+1/9+1/9+1/6=48/54<1$

סכום האיברים ברמה הראשונה שווה ל $\sqrt[4]{n}$

סכום האיברים ברמה השניה בעץ שווה ל $\sqrt[4]{n}\cdot q$

סכום האיברים ברמה השלישית $\sqrt[4]{n}\cdot q^2$

וכן הלאה.

נסמן ב- **x** את מספר הרמות בעץ.

לכן נקבל ש-

$$\text{(2)}\quad T(n)\le\sqrt[4]{n}\cdot(1+q+q^2+\ldots+q^{x-1})\le\sqrt[4]{n}\cdot(1+q+q^2+\ldots)=\sqrt[4]{n}\cdot 1/(1-q)=\theta(\sqrt[4]{n})$$

ולכן הראנו ש-

$$\text{(3)}\quad T(n)=O(\sqrt[4]{n})$$

מצד שני בגלל ש- T(n) שווה לסכום כל הצמתים בעץ, הוא יותר גדול משורש העץ ולכן:

$$\text{(4)}\quad T(n)\ge\sqrt[4]{n}=\theta(\sqrt[4]{n})$$

ולכן הראנו ש-

$$\text{(5)}\quad T(n)=\Omega(\sqrt[4]{n})$$

מ- (4) ו- (5) נקבל:

$$\text{(6)}\quad T(n)=\theta(\sqrt[4]{n})$$

**.5**

נגדיר מבנה נתונים – "רשימת רשימות" L בעל התכונות הבאות :

- L (בהמשך נקרא לה "הרשימה הראשית") היא רשימה מקושרת דו-כיוונית, רגילה ממוינת ללא זנב. דהינו, **head(L)** מצביע לראש הרשימה הראשית L ולכל איבר **x** ברשימה הראשית L ישנם השדות הבאים: **list(x), key(x), next(x), prev(x)**.
- לכל איבר **x** ברשימה הראשית L יש שדה **list(x)** שמצביע לרשימה מקושרת דו-כיוונית רגילה לא ממוינת וללא זנב <u>לא ריקה</u> $Q_x$ (הרשימה של האיבר **x**). כל איבר **y** ברשימה $Q_x$ מכיל את השדות: **key(y), key1(y), info(y), next(y), prev(y)**. לרשימות מהסוג $Q_x$ נקרא בהמשך "הרשימות המשניות". הערך של השדה **key1(y)** של איבר **y** ברשימה $Q_x$ שווה לערך של **key(x)**.
- האיברים ברשימה הראשית L מקימים את התכונה הבאה: הערך של המפתח של איבר **x** ברשימה הראשית L שווה לערך של השדה **key1(y)** עבור כל איבר **y** שנמצא ברשימה $Q_x$ .

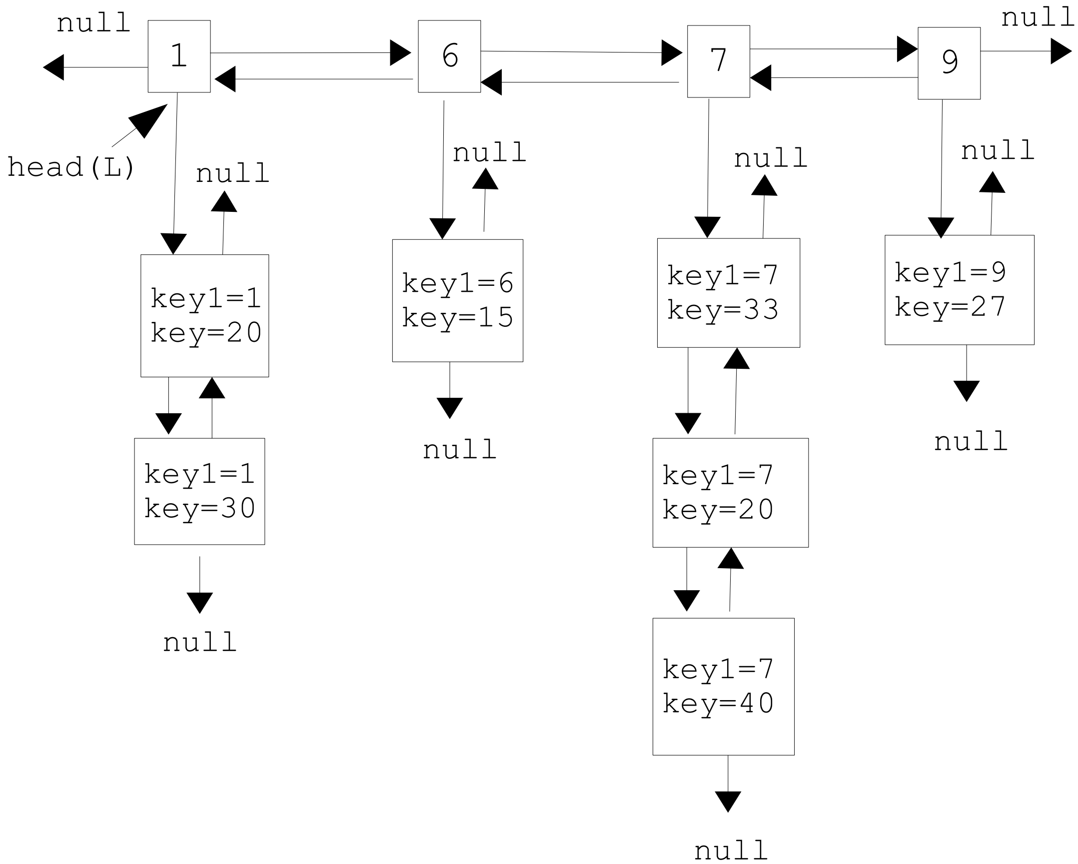
ניתן להניח שמפתחות כל האיברים ברשימה הראשית L שונים זה מזה וכן מפתחות כל האיברים ברשימות המשניות שונים זה מזה.

כתוב/י פסאודו-קוד של פונקציה בשם **P5(L,y)** יעילה ככל האפשר שמקבלת כפרמטרים רשימת רשימות L (כפי שהוגדר למעלה), ואיבר **y** (במבנה של איבר ברשימות המשניות) ומוסיפה אותו לרשימה $Q_x$ של האיבר **x** שנמצא ברשימה הראשית ומקיים את התנאי הבא: **key(x)=key1(y)**. במידה ולא קיים איבר כזה, הפונקציה מוסיפה לרשימה הראשית (במקום המתאים) איבר **x** שהמפתח שלו **key(x)=key1(y)** ויוצרת לאיבר הזה רשימה משנית $Q_x$ שמכילה רק את האיבר **y**.

יש לדאוג לכך שבסיום הפונקציה רשימת הרשימות L החדשה תהיה רשימת רשימות חוקית.

ראה/י דוגמה בעמוד הבא.

לדוגמה, נניח שנתונה רשימת הרשימות L הבאה:

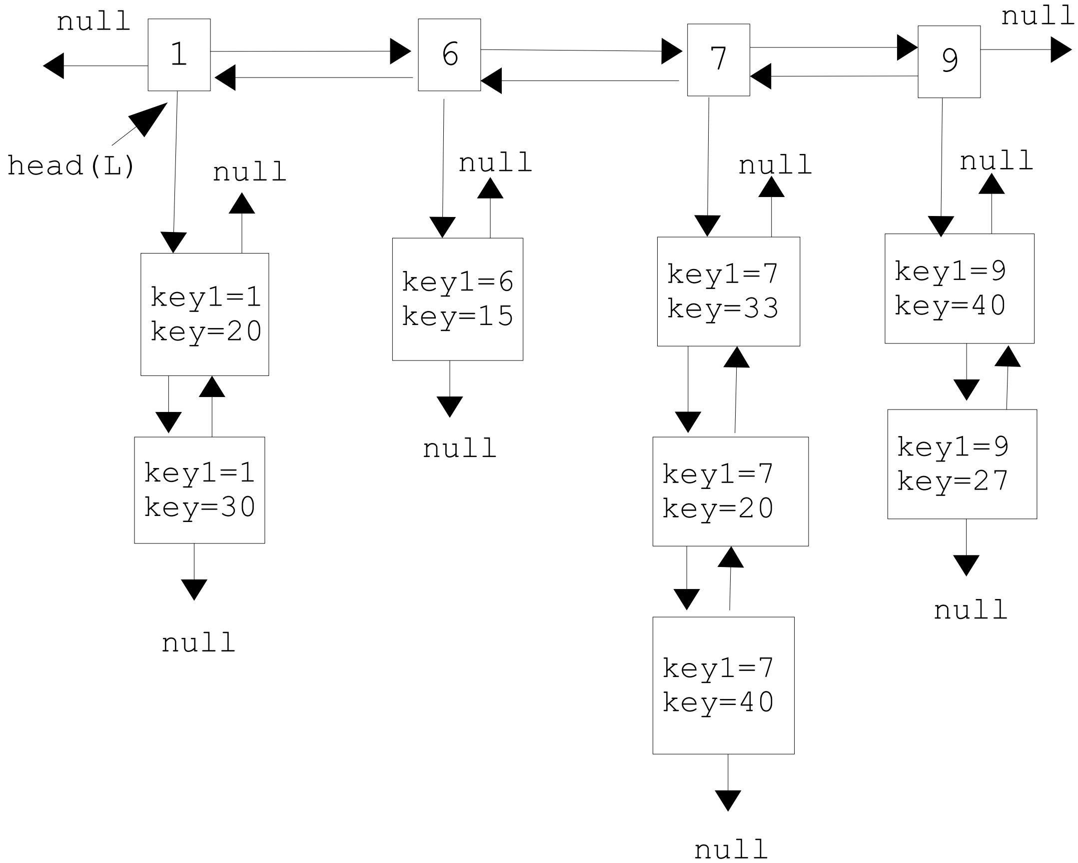



**לאחר הקריאה לפונקציה P5(L,y) כאשר y הוא איבר עם מפתחות:**

**key1(y)=9**

**key(y)=40**

**הרשימת רשימות החדשה שתתקבל תראה כך:**




**שימו לב שישנם מקרים נוספים. למשל לאחר הקריאה לפונקציה עם איבר y שהמפתחות שלו הם key1(y)=5 ו- key(y)=45 הפונקציה תיצור איבר x חדש ברשימה הראשית שהמפתח שלו key(x)=5 והרשימה המשנית שלו $Q_x$ תכיל רק את האיבר y.**

## **<u>פתרון שאלה 5</u>**

```
P5(L,y)
x=head(L)
if (x==NULL) { key(z)=key1(y) /* z is a new element of L
               next(z)=NULL; prev(z)=MULL
               L1=create_new_list(); z.list=y
               head(L1)=y; next(y)=NULL; prev(y)=NULL
               return
             }
```

```
while true {
  if (key(x)==k1) { P5.1(L,y,x); return}
  if (next(x)==NULL || key(x) > key1(y)) {
     P5.2(L,y,x);
     return
  }
  x=next(x)
}
```

<u>P5.1(L,y,x)</u>

```
/* insert y at the beginning of list(x)
z=list(x)
n=next(z)
list(x)=y
next(y)=n
prev(y)=NULL
```

<u>P5.2(L,y,x)</u>

```
/* create a new element z of the main list, put z
/* before x in the main list, and put y as the only
/* element of Q_z
p=prev(x)
next(z)=x /* z is a new element of the main list
prev(z)=p
if head(L)==x {head(L)=z}
L1=create_new_list(); z.list=y
head(L1)=y; next(y)=NULL; prev(y)=NULL
```