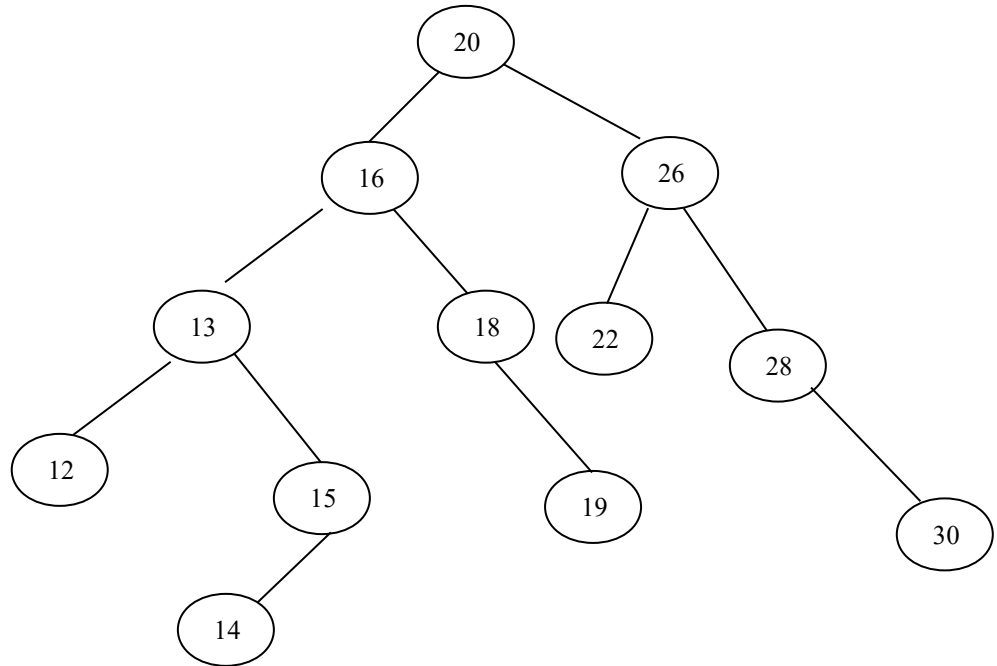


18.4.2018

מבני נתונים
פתרון תרגיל מס' 6

.1

נתון עץ AVL T הבא:

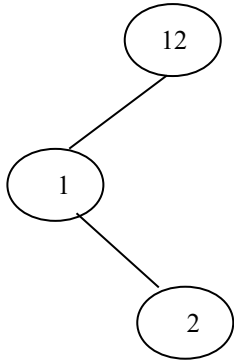


ציר את העץ T_1 שמתקבל לאחר הוספת האיברים 31-35 ל-1-3 לעץ T הנ"ל (לפי הסדר, קודם מוסיפים את 1 אחר כך מוספים את 2 וכן הלאה עד 35). ציין/ציני איזה סוגי גלגולים בוצעו וסביב איזה צומת בוצע כל גלגול. (אין צורך לצייר את העצים שמתקבלים בשלבי הביניים).

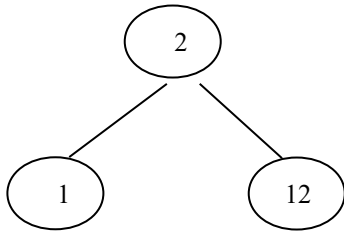
ציר את העץ T_2 שמתקבל לאחר הוצאת האיבר 20 מהעץ T המקורי הנ"ל ציין/ציני איזה סוגי גלגולים בוצעו וסביב איזה צומת בוצע כל גלגול. (אין צורך לצייר את העצים שמתקבלים בשלבי הביניים).

פתרון שאלה 1

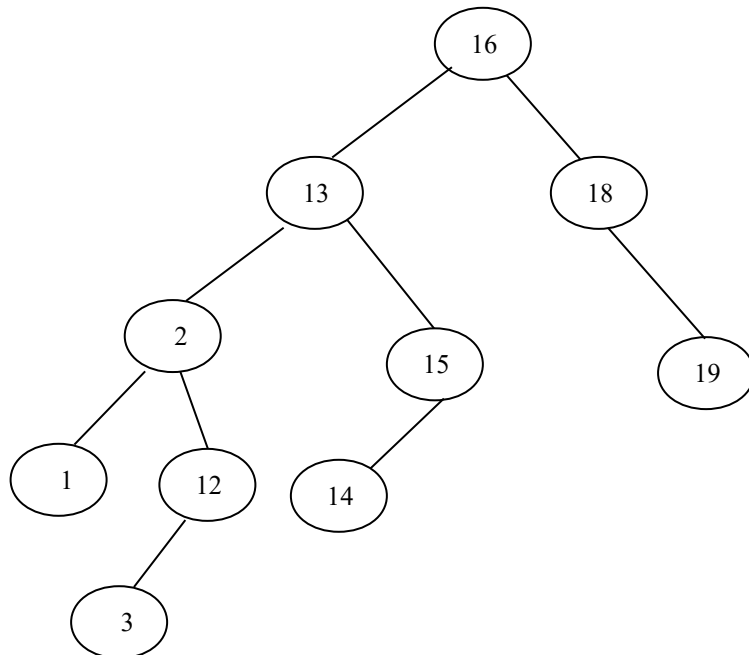
לאחר הוספת צומת 1 לא קורה גלגול לאחר הוספת צומת 2 נוצר תת העץ הבא:



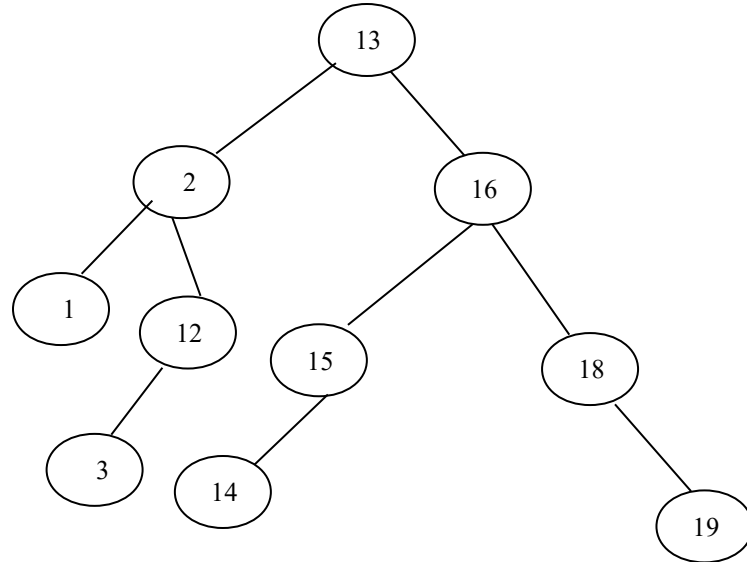
ולכן מתבצע גלגול LR סביב צומת 12 ותת העץ הנ"ל מוחלף ב-



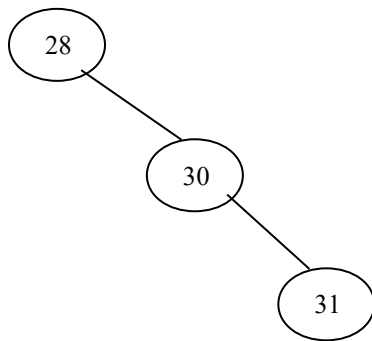
לאחר הוספת צומת 3 מתקבל תת העץ הבא:



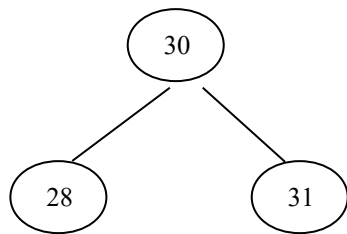
ולכן מתבצע גלגול LL סביב צומת 16 ותת העץ הנ"ל מוחלף ב-



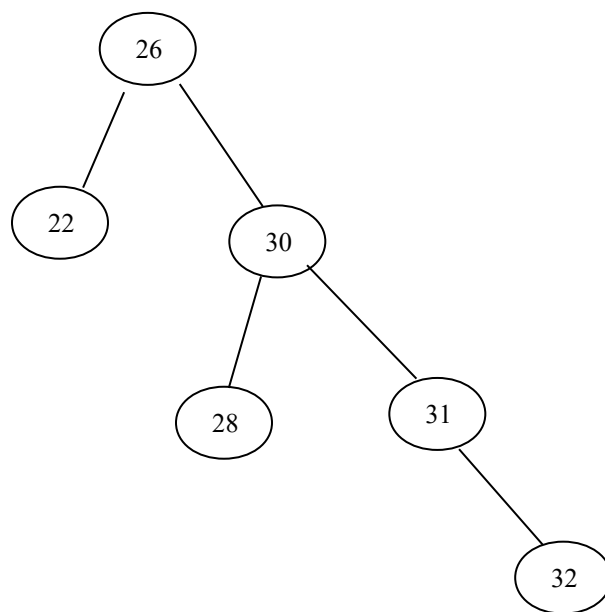
לאחר הוספת צומת 31 נוצר תת העץ הבא:



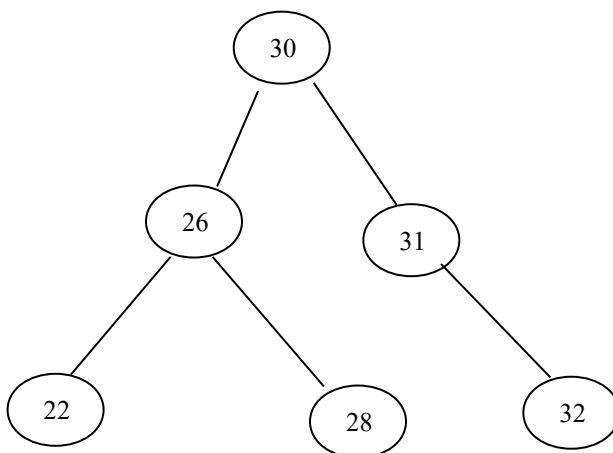
ולכן מתבצע גלגול RR סביב צומת 28 ותת העץ הנ"ל מוחלף ב-



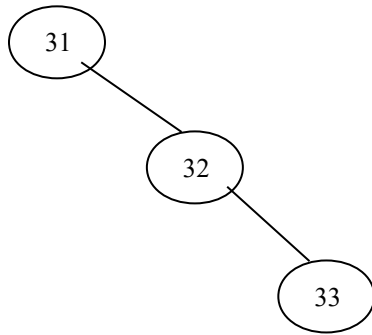
לאחר הוספת צומת 32 מתקבל תת העץ הבא:



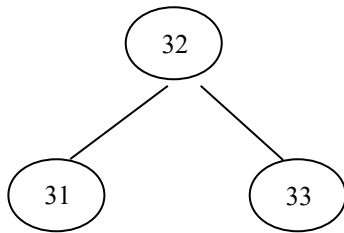
ולכן מתבצע גלגול RR סביב צומת 26 ותת העץ הנ"ל מוחלף ב-



לאחר הוספת צומת 33 מתקבל תת העץ הבא:

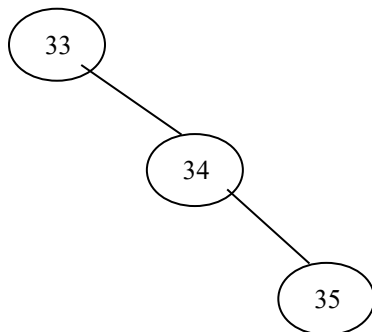


ולכן מתבצע גלגול RR סביב צומת 31 ותת העץ הנ"ל מוחלף ב-

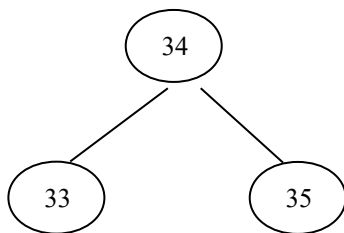


לאחר הוספת צומת 34 לא מתבצע גלגול.

לאחר הוספת צומת 35 מתקבל תת העץ הבא:



ולכן מתבצע גלגול RR סביב צומת 33 ותת העץ הנ"ל מוחלף ב-



ולכן לסיכום התבצעו הגלגולים הבאים:

גלגול LR סביב צומת 12

גלגול LL סביב צומת 16

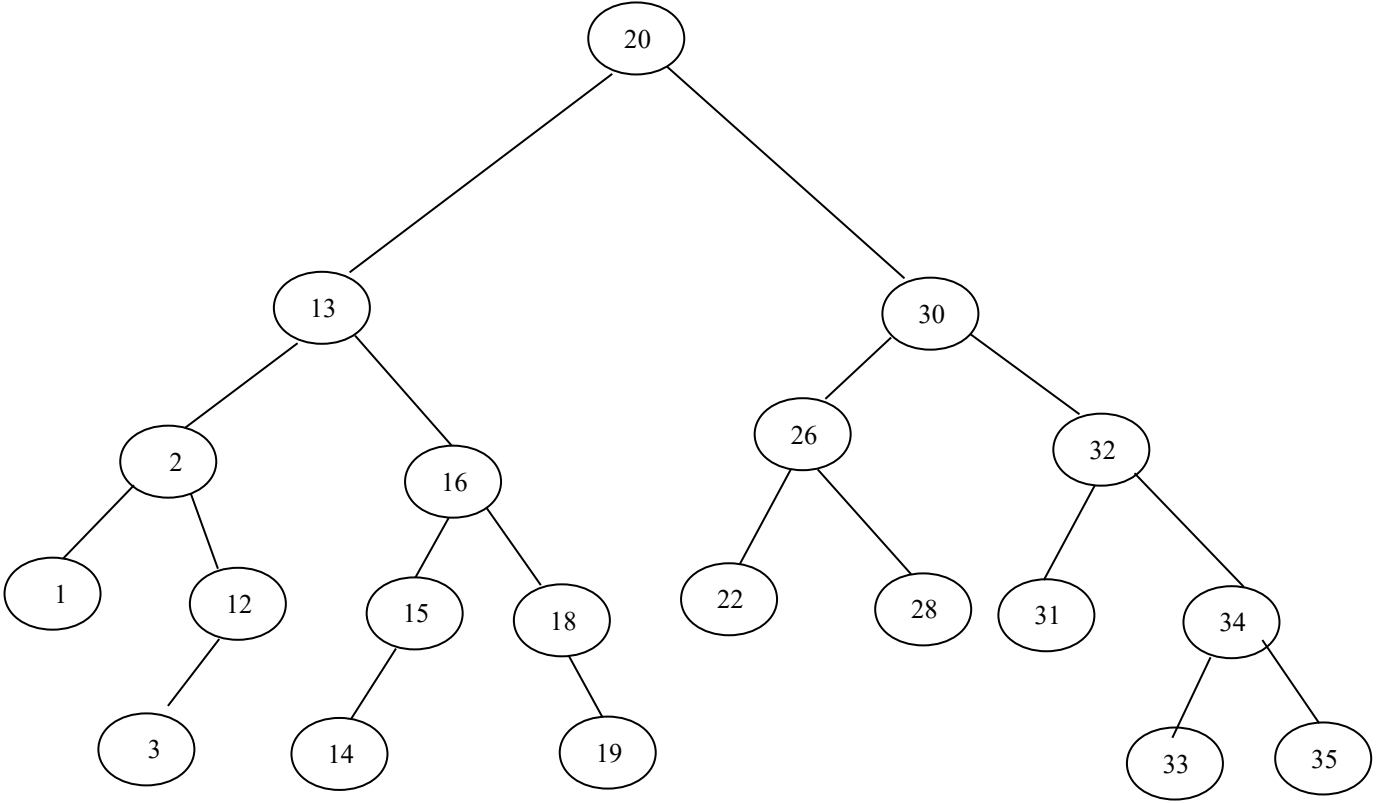
גלגול RR סביב צומת 28

גלגול RR סביב צומת 26

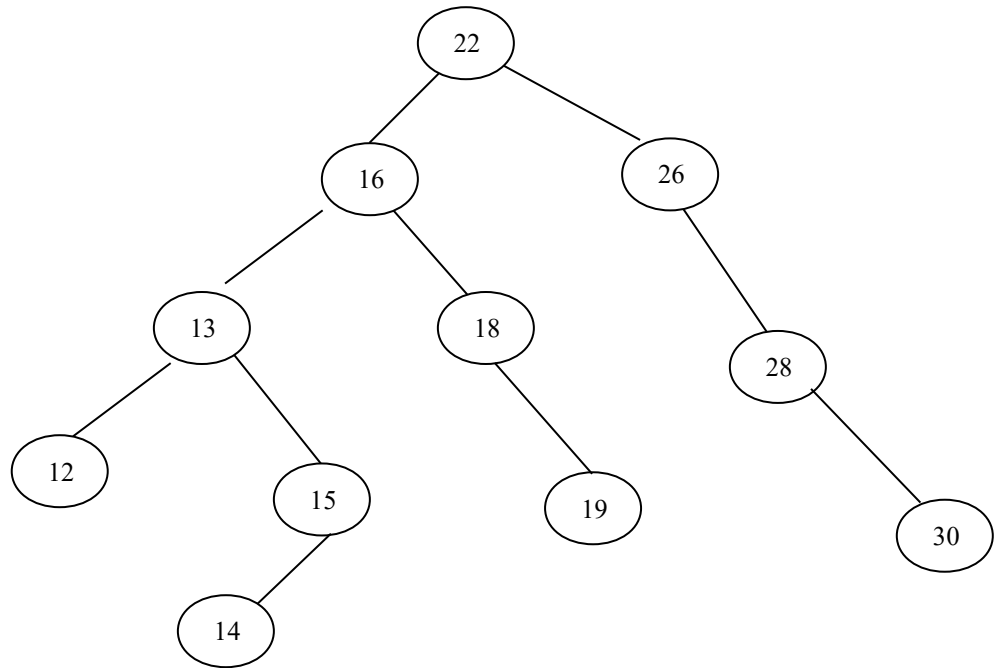
גלגול RR סביב צומת 31

גלגול RR סביב צומת 33

ומתקבל העץ הסופי T_1 שמתואר בעמוד הבא:

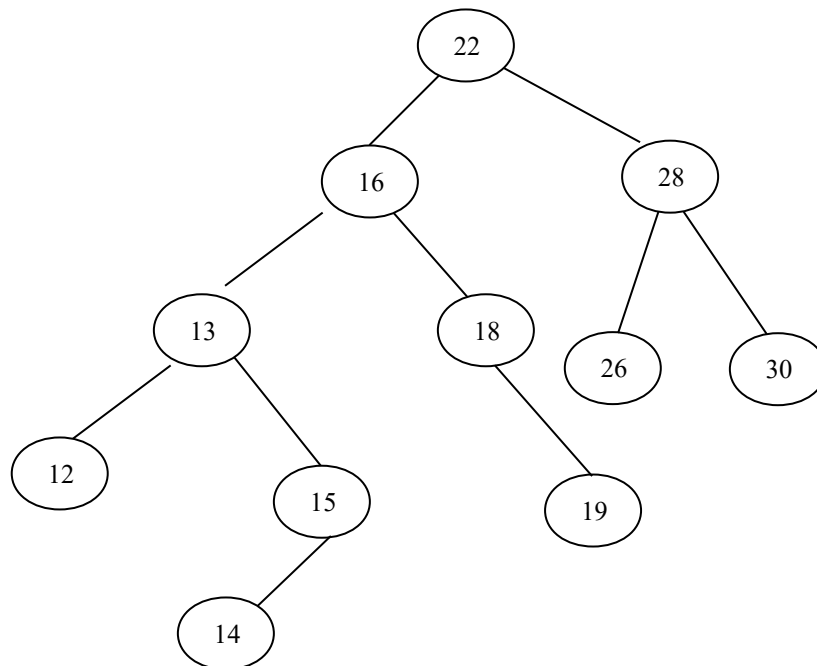


להוצאת 20 מהעץ המקורי, בשלב ראשון מוציאים את 22 ושותלים אותו במקום 20 והעץ נראה כך:



בשלב הזה מתחילים לנוע כלפי מעלה החל מהאבא של 22 המקורי (שהוא 26) לשנות גורמי איזון ולבצע גלגולים אם צריך.

ולכן מבצעים תחילה גלגול RR סביב צומת 26 ומתקבל העץ הבא:



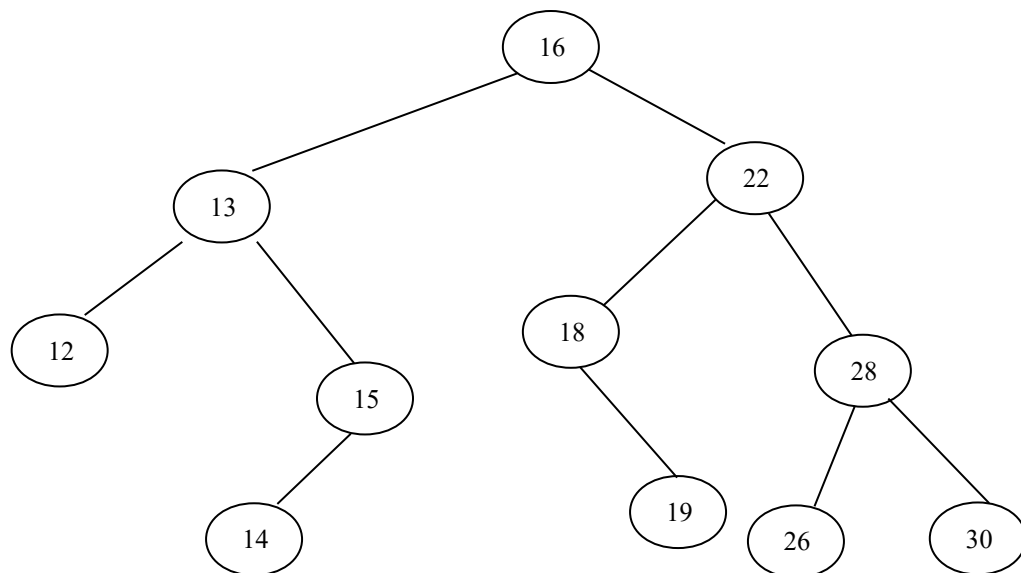
בעץ הנ"ל גורם האיזון סביב 22 הוא +2 ולכן מבצעים גלגול LL סביב 22.

לסיכום התבצעו 2 גלגולים:

גלגול RR סביב 26

גלגול LL סביב 22

והתקבל העץ הסופי T_2 הבא:



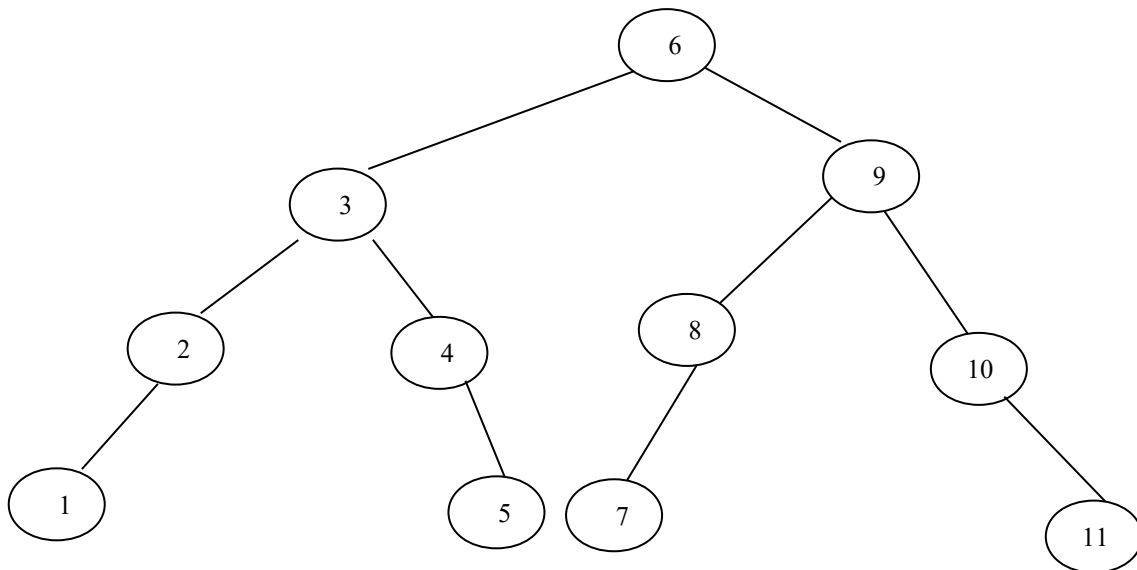
2. שאלה זו מתייחסת להוצאה/הוספה של איברים בעץ AVL לפי האלגוריתמים שנלמדו בכיתה.

האם קיים עץ AVL שמקיים את כל התנאים הבאים:

- מספר הצמתים בעץ הוא בדיוק 11
 - לא קיימים שני צמתים בעץ (גם עלה נחשב צומת) כך שאם נוציא אותם מהעץ המקורי יגובה העץ יקטן ב-1.
 - לא קיים צומת כך שאם נוסיף אותו לעץ המקורי יגובה העץ יגדל ב-1.
- אם תשובתך היא כן צייר עץ כזה.
אם תשובתך היא לא, נמק מדוע לא קיים עץ כזה.

פתרון שאלה 2

העץ הבא מקיים את כל התנאים שבשאלה:



העץ המקורי מכיל 11 צמתים והוא בגובה 4. אם נרצה להגיע לעץ בגובה 3 נצטרך להגיע למספר צמתים ששווה לפחות למספר הצמתים הגדול ביותר של עץ בגובה 3. העץ בגובה 3 עם הכי הרבה צמתים הוא עץ בינארי שלם בגובה 3 שמכיל $2^3 - 1 = 7$ צמתים. ולכן אם נוריד 2 צמתים כלשהם מהעץ הנ"ל לא נגיע לעץ בגובה 3 ותנאי 2 מתקיים.

תנאי 3 מתקיים כי לכל עלה שנוסיף לעץ לפי האלגוריתם של הוספה לעץ חיפוש בינארי (מוספים תמיד עלה לפי האלגוריתם הזה), או שהוא לא ישנה את הגובה של העץ, או שהוא יגדיל את גובה העץ ב-1 ואז מיד יתבצע גלגול (לפי אלגוריתם ההוספה לעץ AVL) וגובה העץ לא ישתנה.

3.

נגדיר את האיבר ה- i בעץ, כאיבר שנמצא במקום i בסידור האיברים לפי המפתחות שלהם. למשל האיבר ה- 1 הוא האיבר בעל המפתח הקטן ביותר והאיבר ה- n הוא האיבר בעל המפתח הגדול ביותר.

שאלה זו מתייחסת להוצאה/הוספה של איברים בעץ AVL לפי האלגוריתמים שנלמדו בכיתה.

האם קיים עץ T AVL שמקים את התנאי הבא:

- כאשר נוציא מהעץ את האיבר השני בגודלו (דהינו האיבר ה- $(n-1)$) יקרה גלגול מסוג RL במהלך ההוצאה.

אם תשובתך היא כן צייר עץ כזה.
אם תשובתך היא לא, נמק מדוע לא קיים עץ כזה.

הנחה: לצורך השאלה נניח שכל האיברים בעץ שונים זה מזה.

פתרון שאלה 3

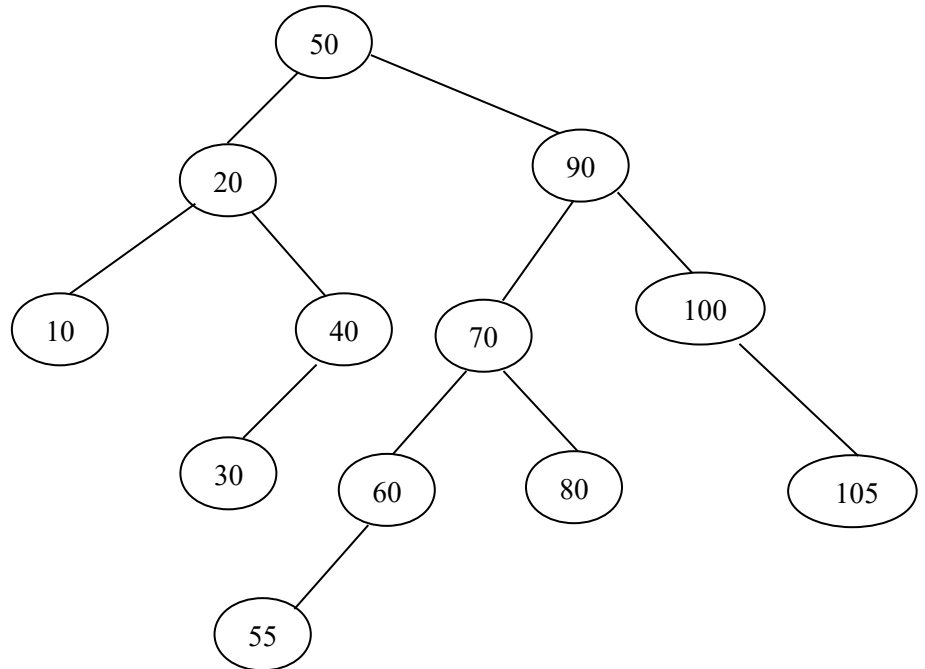
לא קיים עץ כזה. נסמן את האיבר השני בגודלו בעץ ב- x . נניח תחילה של- x אין שני בנים בעץ. לכן במקרה הזה לפי אלגוריתם ההוצאה של עץ חיפוש בינארי, מוציאים את x מהעץ ואז מטפסים החל מ- x כלפי מעלה לכוון השורש. אם במהלך הטיפוס למעלה מגיעים לצומת y מצד ימין, אז הגלגול שיכול להתבצע סביב צומת y הוא גלגול LR או LL וזה לא הגלגול הנדרש. לכן כדי שיקרה גלגול מסוג RL בצומת y אז חייבים להגיע לצומת y מצד שמאל. אבל במקרה זה גם y וגם הבן הימני של y גדולים מ- x וזו סתירה לכך ש- x הוא השני בגודלו.

נניח עכשיו של- x יש שני בנים. במקרה הזה נסמן את הבן הימני של x ב- z . אם ל- z יש עוד בנים אז x הוא לא השני בגודלו כי גם z וגם הבנים שלו גדולים מ- x . לכן z הוא עלה ובמהלך הוצאת x מוציאים בפועל את z , שותלים אותו במקום x וממשיכים מהאבא של x לטפס לעבר השורש לשנות גורמי איזון ולבצע גלגולים אם צריך. לכן כדי שיתבצע גלגול מסוג RL צריך להגיע במהלך הטיפוס לצומת y מצד שמאל, אבל במקרה זה נגיע לסתירה כמו במקרה הקודם, כי גם y וגם הבן הימני של y יהיו גדולים מ- x , בסתירה לכך ש- x הוא השני בגודלו.

4. שאלה זו הופיעה במועד ב 2017

שאלה זו מתייחסת להוספה/הוצאה של איברים בעץ AVL לפי אלגוריתמי ההוספה/הוצאה שנלמדו בכיתה.

יהי T עץ AVL שמתואר בציור הבא :



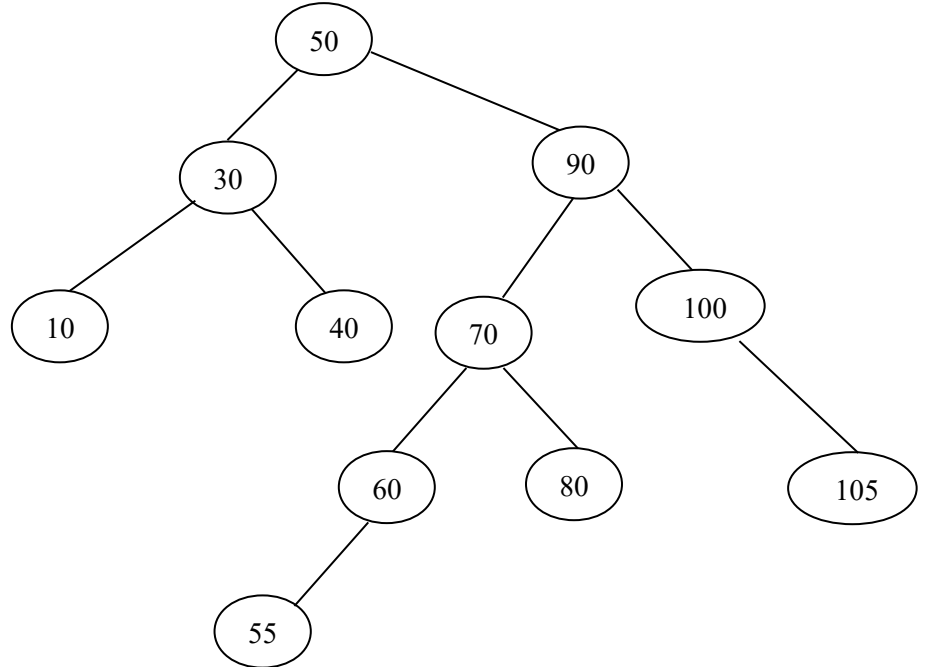
א) ציר את העץ שיתקבל לאחר הוצאת הצמתים 20 ו-40 מהעץ המקורי T. (הנח שקודם מוציאים את 20 ואחר כך מוציאים את 40). מספיק לצייר את העץ הסופי, אין צורך לצייר את שלבי הביניים.

ב) מהו המספר הקטן ביותר של צמתים שיש להוסיף לעץ T המקורי כדי לגרום לגלגול מסוג RL סביב צומת 90. בנוסף לציין מספר הצמתים הנדרש, ציין גם את מספרי המפתחות של הצמתים שצריך להוסיף לעץ כדי לגרום לגלגול הנדרש. בסעיף זה אין צורך לצייר את העץ הסופי שמתקבל לאחר ההוספות.

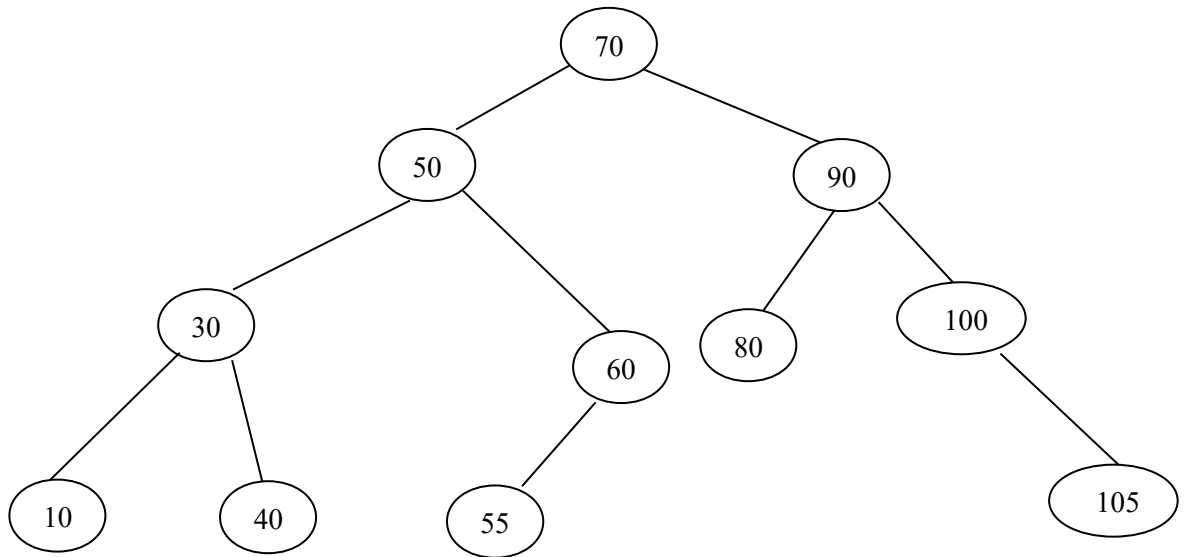
פתרון שאלה 4

פתרון חלק א

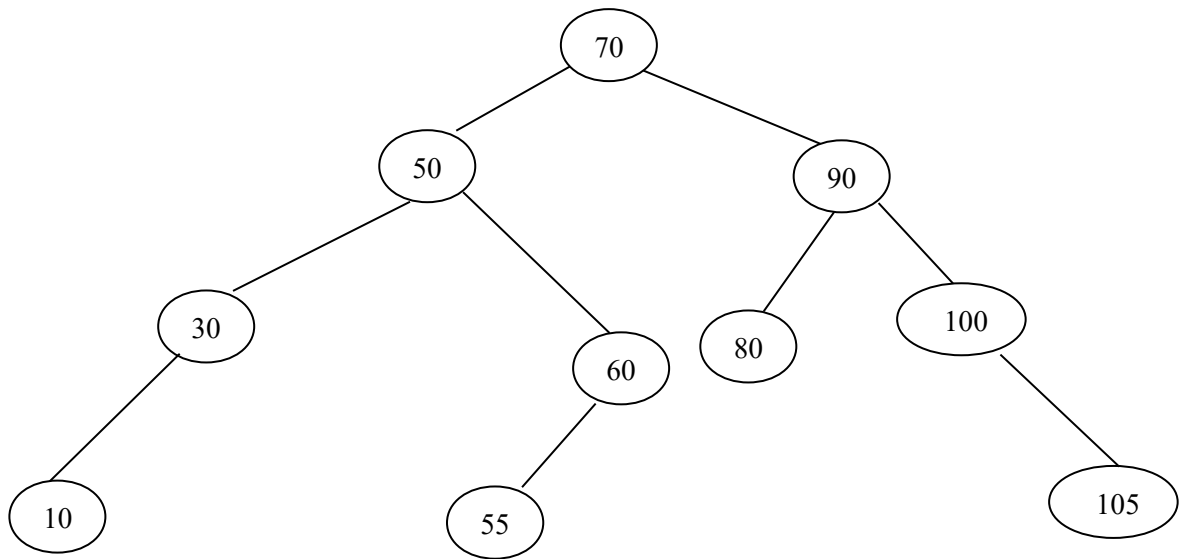
לאחר הוצאת 20 יתקבל תחילה העץ הבא:



בעץ הנ"ל יתבצע גלגול מסוג RL סביב צומת 50, לאחר גלגול זה יתקבל העץ הבא:

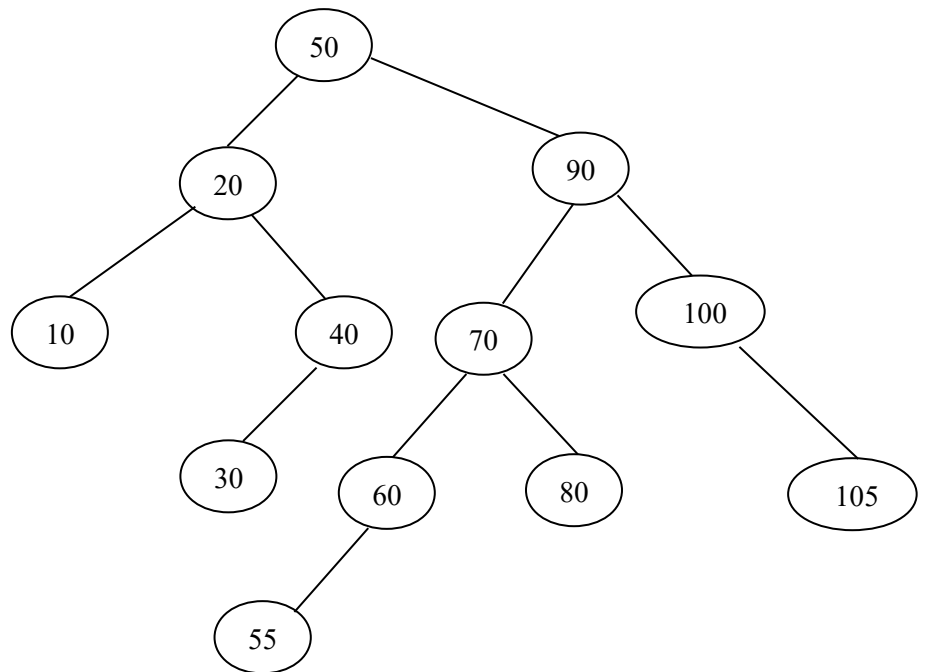


לאחר הוצאת 40 מהעץ הנ"ל לא יתבצע גלגול נוסף ויתקבל העץ הסופי הבא:



פתרון חלק ב

נסתכל על העץ המקורי:



בעץ הזה לצומת 90 שני בנים הבן 70 הוא שורש של תת עץ בגובה 3 כדי שיתבצע גלגול RL צריך ליצור מצב שלבן השני של 90 יש תת עץ בגובה 5 שהחלק הכבד שלו נמצא בצד שמאל.

העץ AVL הקטן ביותר בגובה	1 מכיל	צומת אחת
העץ AVL הקטן ביותר בגובה	2 מכיל	2 צמתים
העץ AVL הקטן ביותר בגובה	3 מכיל	$1+2+1=4$ צמתים
העץ AVL הקטן ביותר בגובה	4 מכיל	$2+4+1=7$ צמתים
העץ AVL הקטן ביותר בגובה	5 מכיל	$4+7+1=12$ צמתים

ולכן מתחת 100 צריך ליצור עץ שמכיל 12 צמתים, 2 צמתים כבר יש אז צריך להוסיף 10 צמתים. בנוסף צריך להוסיף צמתים בצד שני כדי שבמהלך הוספת הצמתים לא יקרה גלגול בשורש העץ.

הצומת האחרון שנוסיף (שיגרום לגלגול RL) בצומת 90 יצור עץ בגובה 5 מתחת 100 ולכן הגובה של העץ מתחת 90 יצא 6 (ולפני שהוספנו את הצומת האחרון הגובה מתחת 90 יצא 5). לכן כדי שלא יהיה גלגול בשורש במהלך ההוספות צריך שהעץ מתחת 20 יהיה בגובה 4. את זה אפשר ליצור על ידי הוספת 3 צמתים מתחת 20. ולכן בסך הכל התשובה היא שצריך להוסיף 13 צמתים.
מספרי המפתחות שלהם: להוספה לצד שמאל נוסף 7-9
להוספה לצד ימין נוסף 3 מתחת 105 שהם: 104, 106, 107 ועוד 7 מתחת 100 שהם 91-97

בעמוד הבא מוצג ציור של העץ עם כל התוספות כאשר הצומת 91 הוא האחרון שמוסיפים שיוצר את הגלגול RL בצומת 90.

