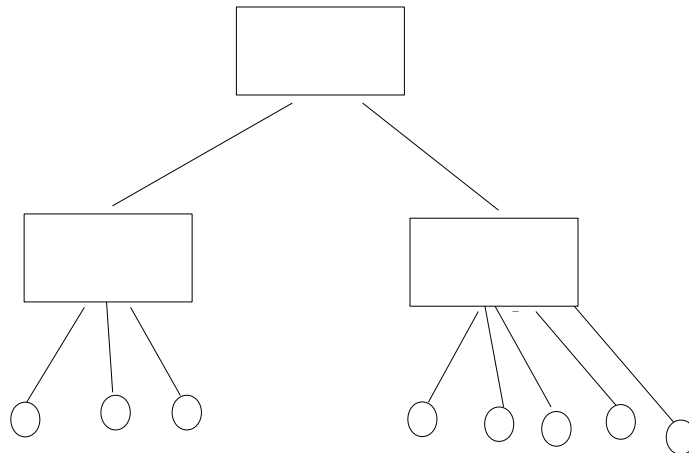


28.4.2018

מבני נתונים
פתרון תרגיל מס' 7

1. שאלה זו הופיעה במבחן מועד ג 2017

שאלה זו מתייחסת להוספה של איברים לעץ B לפי אלגוריתם ההוספה שנלמד בכיתה.
יהי T עץ B שבו $t=3$ שמתואר בציור הבא (גובה העץ 3):

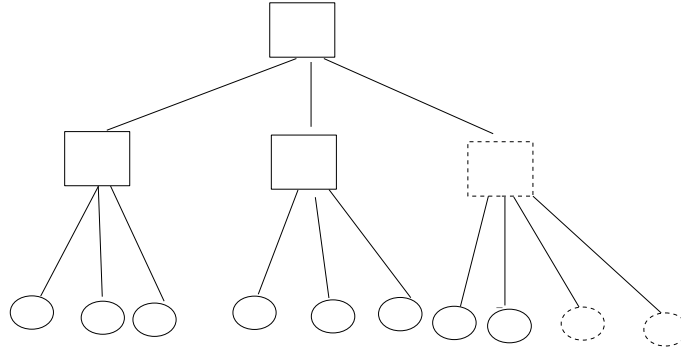


מהו המספר הקטן ביותר של איברים שיש להוסיף לעץ (אחד אחרי השני) כדי לקבל עץ שגובהו 4 ומספר צמתי הדמה שלו (דהינו מספר המלבנים שבציור שמתאר אותו) הוא 11.

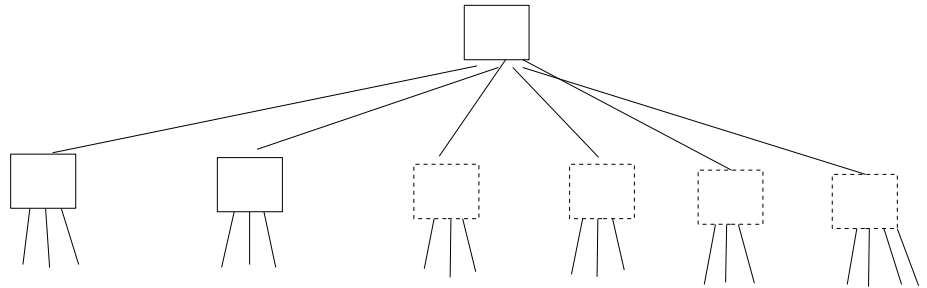
נמק את תשובתך על ידי ציור העץ T וציון המפתחות של הצמתים שצריך להוסיף לעץ כדי לקבל את העץ הנדרש.

פתרון שאלה 1

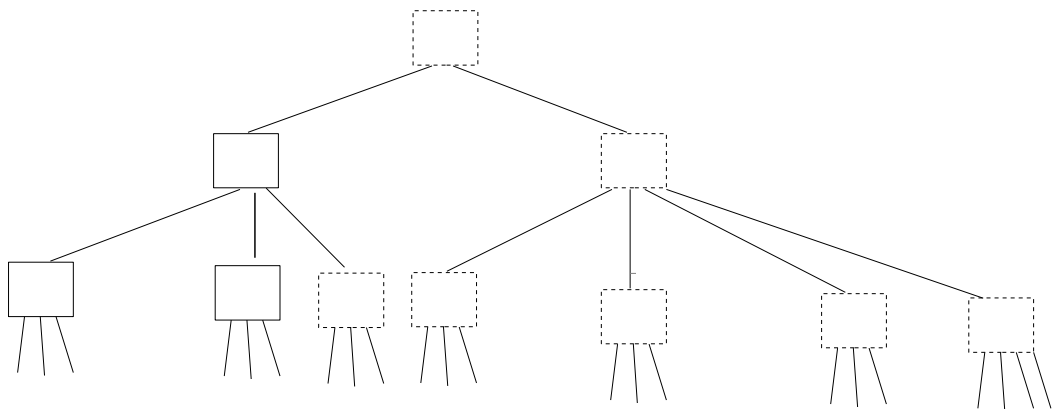
נוסיף איברים לצד הימני של העץ עד שנגיע לעץ שגובהו 4 ויש לו 11 צמתי דמה. בשלב ראשון נוסיף 2 צמתיים גדולים ביותר ונקבל את העץ הבא:



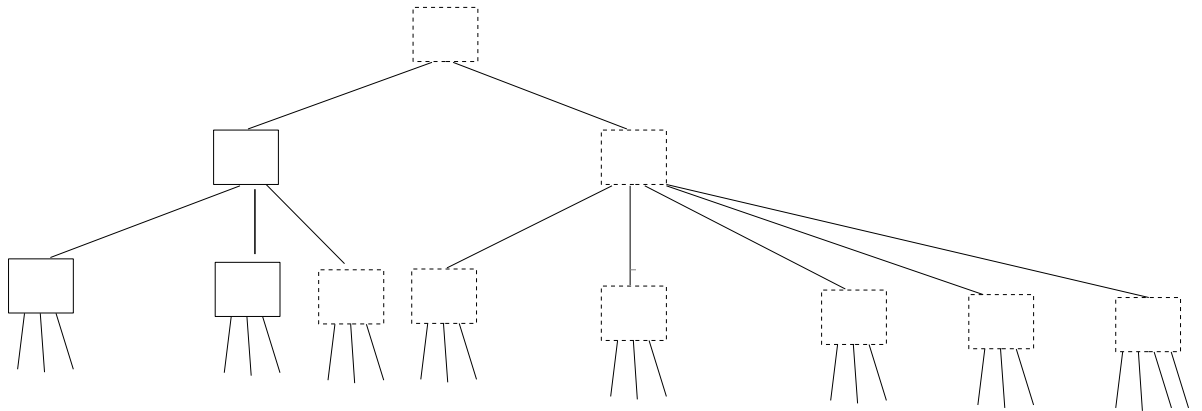
מהשלב הזה כל הוספת 3 צמתיים גדולים ביותר גורמת ליצירת צומת דמה נוספת. נוסיף 3 צמתיים גדולים ביותר 3 פעמים ונקבל את העץ הבא:



נוסיף 3 צמתיים גדולים ביותר ונקבל את העץ הבא:



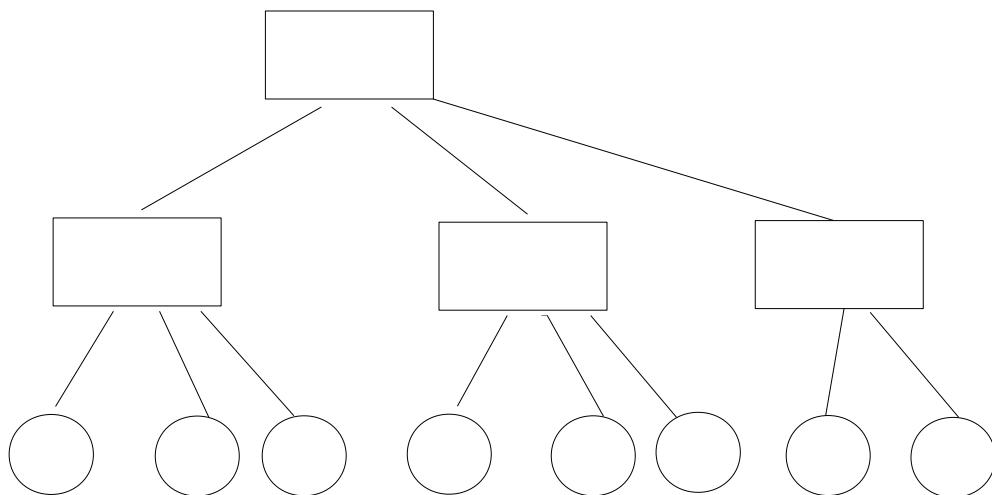
בעץ הנ"ל מספר צמתי הדמה הוא 10 וגובהו 4. נוסיף עוד 3 צמתיים גדולים ביותר ונקבל את העץ הבא שהוא העץ שנדרש.



בעץ הנ"ל יש סה"כ 25 עלים. בעץ המקורי היו 8 עלים ולכן הוספנו 17 עלים לצד הימני של העץ. במילים אחרות, הוספנו 17 איברים לעץ שהמפתחות שלהם גדולים מהמפתחות של כל שאר האיברים בעץ.

.2

שאלה זו מתייחסת להוספה של איברים לעץ B לפי אלגוריתם ההוספה שנלמד בכיתה.
יהי T עץ B שבו $t=2$ שמתואר בציור הבא (גובה העץ 3):

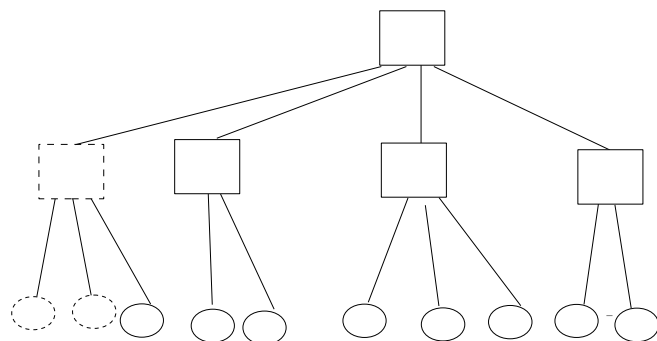


מהו המספר הקטן ביותר של איברים שיש להוסיף לעץ (אחד אחרי השני) כדי לקבל עץ שגובהו 4 ומספר הבנים של השורש שלו הוא 3.

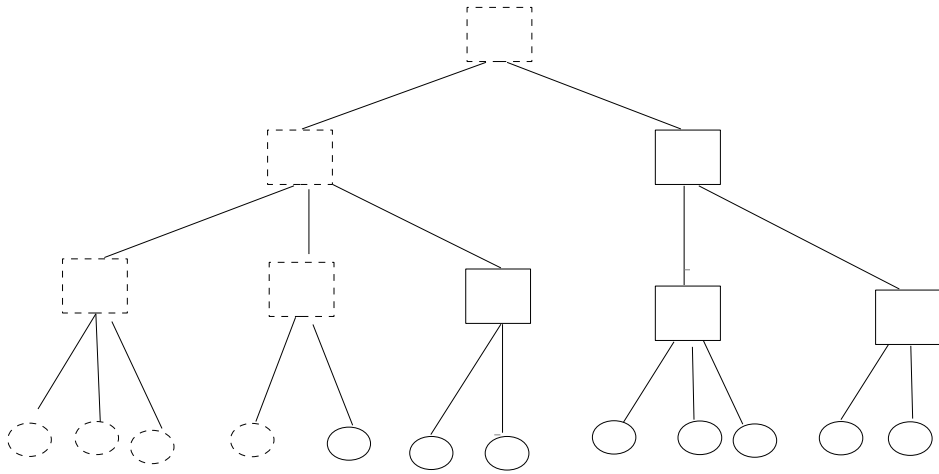
נמק את תשובתך על ידי ציור העץ T וציון הצמתים שצריך להוסיף לעץ כדי לקבל עץ שגובהו 4 ומספר הבנים של השורש שלו הוא 3.

פתרון שאלה 2

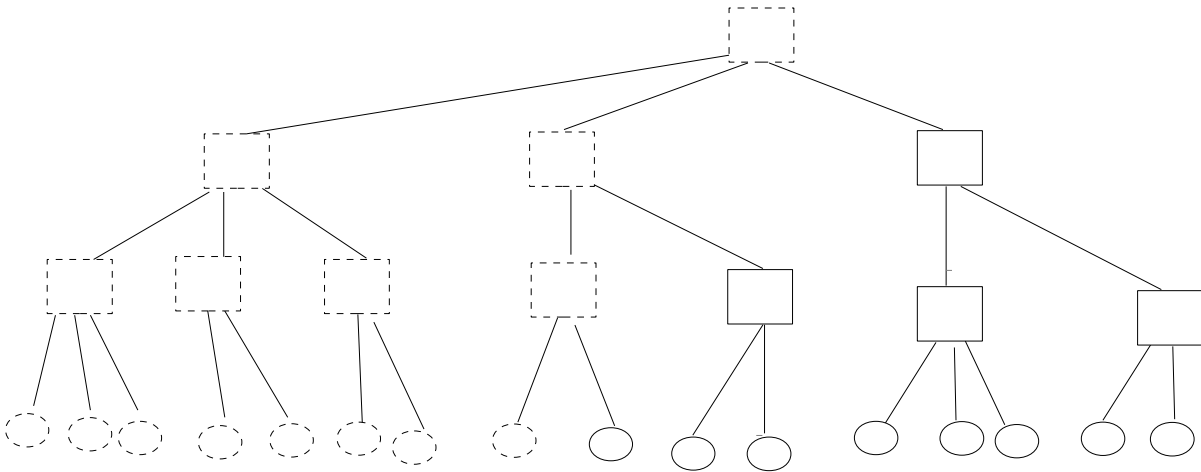
נוסיף איברים לצד השמאלי של העץ עד שנגיע לעץ שגובהו 4 ומספר הבנים של השורש שלו הוא 3. בשלב ראשון נוסיף 2 צמתים קטנים ביותר ונקבל את העץ הבא:



לעץ הנ"ל נוסף שני איברים קטנים ביותר ונקבל את העץ הבא:



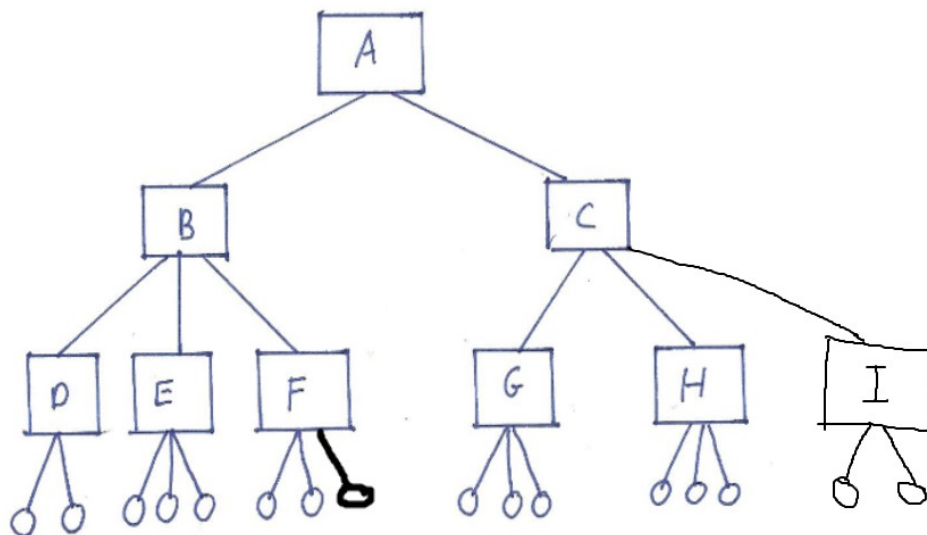
נוסיף עוד פעמיים שני איברים קטנים ביותר ונקבל את העץ הבא שהוא העץ הנדרש:



בעץ הנ"ל יש 16 עלים. בעץ המקורי היו 8 עלים. לכן הוספנו 8 עלים שהמפתחות שלהם קטנים מהמפתחות של כל שאר האיברים בעץ.

3.

שאלה זו מתייחסת להוצאה של איברים מעץ 2-3 לפי אלגוריתם ההוצאה שנלמד בכיתה.
יהי T עץ 2-3 שמתואר בציור הבא:



מהו המספר הקטן ביותר של איברים שיש להוציא מהעץ (אחד אחרי השני) כדי שגובה העץ יקטן ב-2. נמק את תשובתך על ידי ציור העץ וציון הצמתים שצריך להוציא מהעץ כדי שגובהו יקטן ב-2.

פתרון שאלה 3

עץ 2-3 בגובה 2 מורכב משורש ובנים. העץ הכי גדול בגובה 2 מורכב משורש ושלושה בנים. בעץ T יש 16 עלים, כדי להגיש לשורש ושלושה עלים צריך להוציא 13 עלים. למשל אם מוציאים את 13 האיברים הקטנים ביותר בעץ מקבלים שורש עם 3 בנים.

4. שאלה זו הופיעה במבחן מועד א 2017

הוכח שלכל מספר שלם חיובי n שמתחלק ב-6 (ללא שארית) וגדול מ-32 קיים עץ בינארי שמקיים את כל ארבעת התנאים הבאים:

(1) מספר הצמתים בעץ הוא בדיוק n .

(2) גובה העץ גדול או שווה ל- $\frac{n}{3} + \log_2\left(\frac{n}{3}\right)$

(3) יש בעץ לפחות $\frac{n}{12}$ צמתים שהרמה שלהם

גדולה מ- $\frac{n}{6} + \log_2\left(\frac{n}{3}\right) - 3$

וקטנה מ- $\frac{n}{6} + \log_2\left(\frac{n}{3}\right) + 3$

(4) יש בעץ לפחות $\frac{5n}{12} - 1$ עלים.

$$(2) \quad n/6 + \log_2(n/3) - 3 < r < n/6 + \log_2(n/3) + 3$$

ולכן דרישה 3 מתקימת.

לעץ שצירנו יש לפחות $n/3$ עלים מאחר ומכל אחד מ- $n/6$ הצמתים שבמסלול של המסרק יוצא עלה, ובנוסף לכך לפי טענה 8 לעץ יש לפחות $\frac{n/3+1}{4} > n/12$ עלים, כאשר עלה אחד מתבטל בגלל המסרק התחתון.

$$\frac{n}{3} + \frac{n}{12} - 1 = \frac{5n}{12} - 1 \quad \text{לכן בסך הכל מספר העלים גדול או שווה ל-}$$

ולכן דרישה 4 מתקימת.

נסמן ב- h את גובה העץ הכמעט שלם. לפי טענה 6:

$$(3) \quad h \geq \log_2(n/3+1) > \log_2(n/3)$$

נסמן ב- H את גובה העץ שבציוור. לפי הציוור מתקיים:

$$(4) \quad H = \frac{n}{6} + h + \frac{n}{6} + 1$$

מ- (3) ו- (4) נקבל:

$$(5) \quad H > \frac{n}{3} + h > \frac{n}{3} + \log_2(n/3)$$

ולכן דרישה 1 מתקימת.

לסיכום הראנו שהעץ שבציוור מקיים את כל דרישות השאלה.