ביה"ס למדעי המחשב האקדמית נתניה
סמסטר ב' תשע"ח

30.4.2018

מבני נתונים
פתרון תרגיל מס' 8

1. שאלה זו הופיעה במבחן מועד ב 2017

נזכיר שתת העץ הימני/השמאלי של צומת **x** מוגדר כתת העץ ששורשו הוא הבן הימני/השמאלי של הצומת **x**.

הוכח שלכל מספר שלם חיובי n שמתחלק ב- 8 (ללא שארית) וגדול מ- 32 קיים עץ בינארי שמקיים את כל ארבעת התנאים הבאים:

1) מספר הצמתים בעץ הוא בדיוק n.

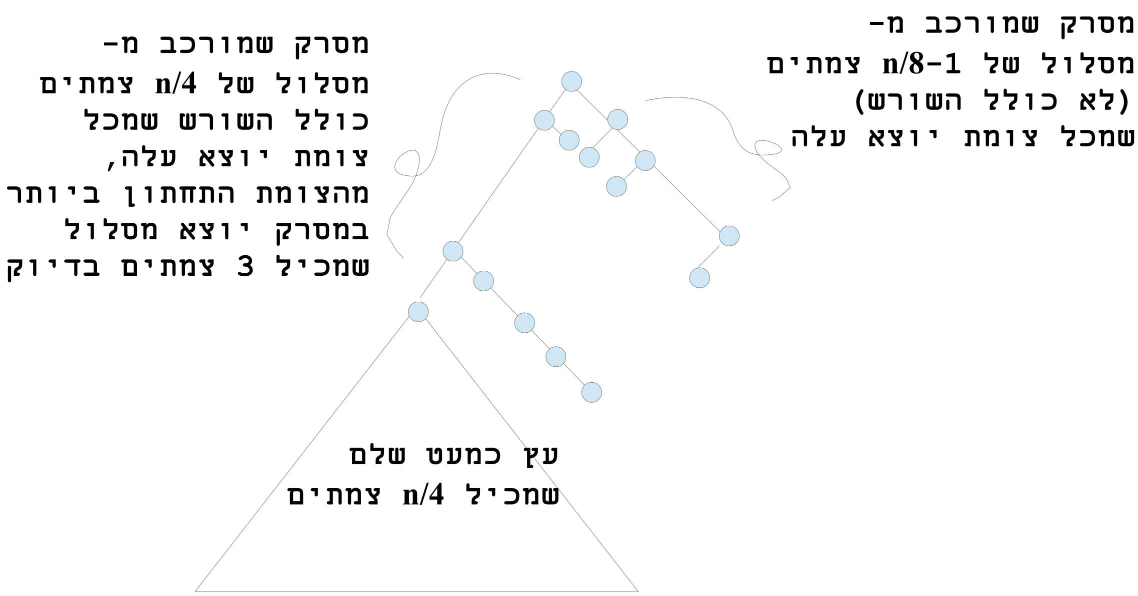
2) בתת העץ הימני של השורש יש לפחות $\frac{n}{4}-2$ צמתים ובתת העץ השמאלי של השורש יש לפחות $\frac{n}{4}-2$ צמתים.

3) יש בעץ לפחות $\frac{n}{16}$ צמתים שהרמה שלהם
גדולה מ- $\frac{n}{4}+\log_2(\frac{n}{4})-3$
וקטנה מ- $\frac{n}{4}+\log_2(\frac{n}{4})+3$

4) יש בעץ לפחות $\frac{7n}{16}-2$ עלים.

פתרון שאלה 1

נסתכל על העץ שבציור הבא ונראה שהוא עונה על כל הדרישות שבשאלה.



העץ מקיים את דרישה 1 כי:

$$n = -1 + n/4-2 + n/2+3 + n/4 = \text{מספר הצמתים בעץ}$$

מפחיתים 1 כי את הבן הימני של השורש ספרנו פעמיים

המסרק הימני

המסרק השמאלי ועוד 3 הצמתים שבמסלול התחתון במסרק

העץ

לפי טענה 10 בעץ יש לפחות $\frac{n/4+1}{4} > n/16$ צמתים שהמרחק שלהם מהשורש של העץ גדול מ- $\log_2(n/4)-2$ וקטן מ- $\log_2(n/4)+1$.
נסמן ב- r את הרמה של הצמתים האלה. כדי לקבל את הרמה r של הצמתים האלה צריך להוסיף למרחק שלהם מהשורש של העץ את אורך המסלול שהוא $n/4$

לכן נקבל:

$$n/4+\log_2(n/4)-2 < r < n/4+\log_2(n/4)+1 \quad (1)$$

מ- (1) נקבל שיש לפחות $n/16$ צמתים שהרמה שלהם r מקיימת:

(2) $n/4+\log_2(n/4)-3<r<n/4+\log_2(n/4)+3$

ולכן דרישה 3 מתקימת.

בעץ שצירנו בתת העץ הימני של השורש יש $n/4-2$ צמתים ובתת העץ השמאלי יש $3n/4+1$ צמתים ולכן דרישה 2 מתקיימת.

למסרק הימני יש n/8-1 עלים, למסרק השמאלי יש n/4-1 עלים ולעץ הכמעט שלם יש לפחות n/16 עלים לפי טענה 8. ולכן סה"כ מספר העלים גדול או שווה ל- $n/8-1+n/4-1+n/16=7n/16-2$ ולכן דרישה 4 מתקיימת.

יש לפחות $\frac{n/3+1}{4}>n/12$ עלים, כאשר עלה אחד מתבטל בגלל המסרק התחתון.

לכן בסך הכל מספר העלים גדול או שווה ל- $\frac{n}{3}+\frac{n}{12}-1=\frac{5n}{12}-1$

ולכן דרישה 4 מתקימת.

לסיכום הראנו שהעץ שבציור מקיים את כל דרישות השאלה.

2. שאלה זו הופיעה במבחן מועד ג 2017

נזכיר שתת העץ הימני/השמאלי של צומת **x** מוגדר כתת העץ ששורשו הוא הבן הימני/השמאלי של הצומת **x**.

הוכח שלכל מספר שלם חיובי **n** שמתחלק ב- 16 (ללא שארית) וגדול מ- 32 קיים עץ בינארי שמקיים את כל ארבעת התנאים הבאים:

1) מספר הצמתים בעץ הוא בדיוק **n**.

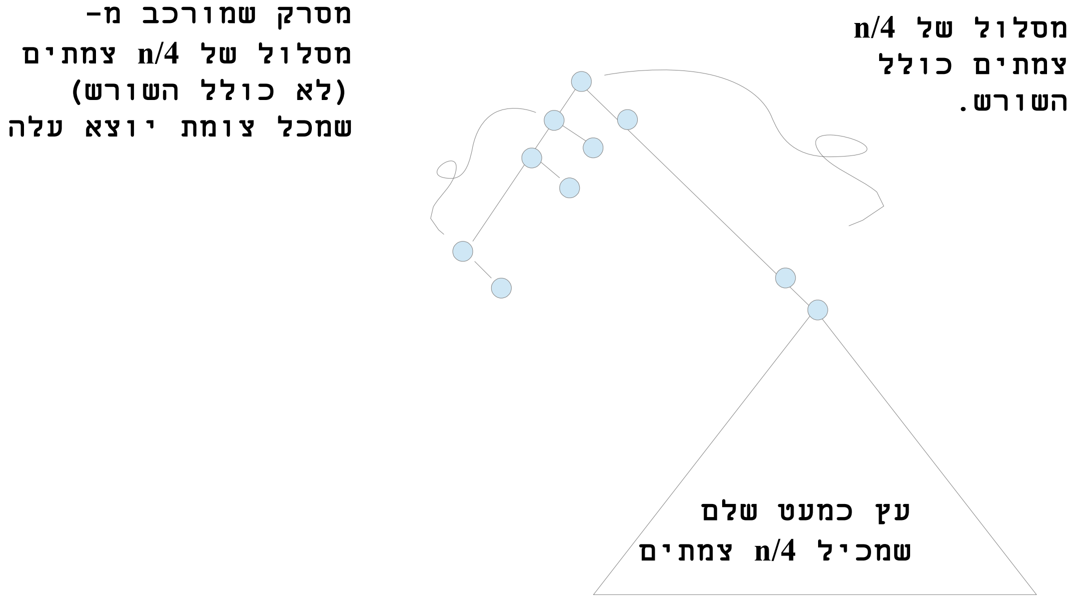
2) בתת העץ הימני של השורש יש לפחות $\frac{n}{2}-2$ צמתים ובתת העץ השמאלי של השורש יש לפחות $\frac{n}{2}$ צמתים.

3) יש בעץ לפחות $\frac{n}{16}$ צמתים שהרמה שלהם
גדולה מ- $\frac{n}{4}+\log_2(\frac{n}{4})-3$
וקטנה מ- $\frac{n}{4}+\log_2(\frac{n}{4})+3$

4) יש בעץ לפחות $\frac{5n}{16}-1$ עלים.

<u>פתרון שאלה 2</u>

נסתכל על העץ שבציור הבא ונראה שהוא עונה על כל הדרישות שבשאלה.



העץ מקיים את דרישה 1 כי:

$n = n/2 + n/4 + n/4$ = מספר הצמתים בעץ

המסרק השמאלי, המסלול הימני, העץ

לפי טענה 10 בעץ יש לפחות $\frac{n/4+1}{4} > n/16$ צמתים שהמרחק שלהם מהשורש של העץ גדול מ- $\log_2(n/4)-2$ וקטן מ- $\log_2(n/4)+1$.
נסמן ב- r את הרמה של הצמתים האלה. כדי לקבל את הרמה r של הצמתים האלה צריך להוסיף למרחק שלהם מהשורש של העץ את אורך המסלול שהוא $n/4$

לכן נקבל:

$$(1)\quad n/4+\log_2(n/4)-2<r<n/4+\log_2(n/4)+1$$

מ- (1) נקבל שיש לפחות $n/16$ צמתים שהרמה שלהם r מקיימת:

$$(2)\quad n/4+\log_2(n/4)-3<r<n/4+\log_2(n/4)+3$$

ולכן דרישה 3 מתקיימת.

בעץ שציירנו בתת העץ הימני של השורש יש $n/2-1$ צמתים ובתת העץ השמאלי יש $n/2$ צמתים ולכן דרישה 2 מתקיימת.

למסרק השמאלי יש n/4 עלים, ולעץ הכמעט שלם יש לפחות n/16 עלים לפי טענה 8. ולכן סה"כ מספר העלים גדול או שווה ל- $n/4+n/16=5n/16$ ולכן דרישה 4 מתקיימת.

לסיכום הראנו שהעץ שבציור מקיים את כל דרישות השאלה.

3. שאלה זו הופיעה במבחן מועד א לפרחי הי טק 2017

הוכח שלכל מספר שלם חיובי n שמתחלק ב- 6 (ללא שארית) וגדול מ- 32 קיים עץ בינארי שמקיים את כל ארבעת התנאים הבאים:

1) מספר הצמתים בעץ הוא בדיוק n.

2) גובה העץ גדול או שווה ל- $\frac{n}{3}+2\cdot\log_2(\frac{n}{6})$

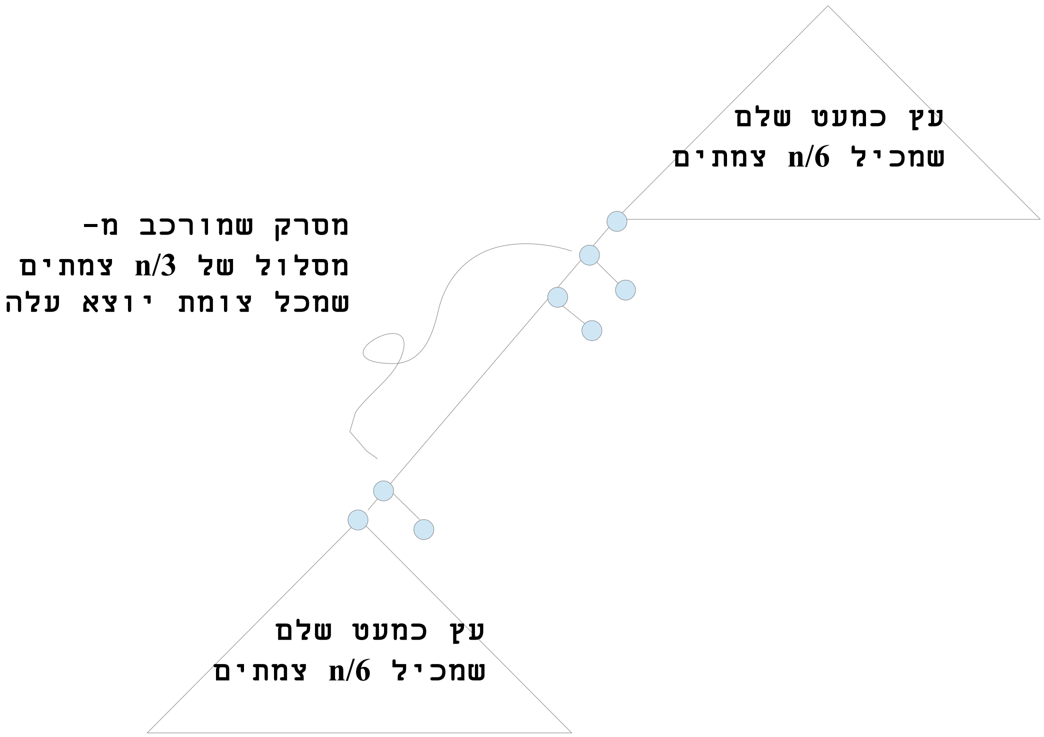
3) יש בעץ לפחות $\frac{n}{24}$ צמתים שהרמה שלהם
גדולה מ- $\log_2(\frac{n}{6})-3$
וקטנה מ- $\log_2(\frac{n}{6})+3$

4) יש בעץ לפחות $\frac{n}{24}$ צמתים שהרמה שלהם
גדולה מ- $\frac{n}{3}+2\cdot\log_2(\frac{n}{6})-4$
וקטנה מ- $\frac{n}{3}+2\cdot\log_2(\frac{n}{6})+4$

5) יש בעץ לפחות $\frac{5n}{12}-1$ עלים.

פתרון שאלה 3

נסתכל על העץ שבציור הבא ונראה שהוא עונה על כל הדרישות שבשאלה.



העץ מקיים את דרישה 1 כי:

$n = 2n/3 + n/6 + n/6 =$ מספר הצמתים בעץ

המסרק   העץ העליון   העץ התחתון

לפי טענה 10 בעץ העליון יש לפחות $\frac{n/6+1}{4} > n/24$ צמתים שהמרחק שלהם מהשורש של העץ גדול מ- $\log_2(n/6)-2$ וקטן מ- $\log_2(n/6)+1$. ולכן דרישה 3 מתקיימת.

לפי טענה 10 בעץ התחתון יש לפחות $\frac{n/6+1}{4} > n/24$ צמתים שהמרחק שלהם מהשורש של העץ התחתון גדול מ- $\log_2(n/6)-2$ וקטן מ- $\log_2(n/6)+1$. נסמן ב- r את הרמה של הצמתים האלה בעץ שצירנו ונסמן ב- h את גובה העץ העליון.

לכן נקבל:

$$(1)\quad n/3+h+\log_2(n/6)-2<r<n/3+h+\log_2(n/6)+1$$

על סמך טענה 6 הגובה h של העץ כמעט שלם העליון מקיים:

(2) $\log_2(n/6) \le h \le 1+\log_2(n/6)$

מ- (1) ו- (2) נקבל:

(3) $n/3+2\log_2(n/6)-2 < r < n/3+2\log_2(n/6)+2$

ולכן דרישה 4 מתקימת.

גובה העץ שווה ל- $n/3+2h$ ולכן מ- (2) נקבל שגובה העץ גדול או שווה ל- $n/3+2\log_2 n/6$ ולכן דרישה 2 מתקימת.

לסיכום הראנו שהעץ שבציור מקיים את כל דרישות השאלה.