בית הספר למדעי המחשב המכללה האקדמית נתניה
סמסטר ב' תשע"ז

29.5.2017

<u>מבני נתונים</u>
<u>פתרון תרגיל מס' 9</u>

1. שאלה זו הופיעה במבחן מועד א 2016

הוכח שלכל מספר שלם חיובי n שמתחלק ב- 6 (ללא שארית) וגדול מ- 32 קיים עץ בינארי שמקיים את כל ארבעת התנאים הבאים:

1) מספר הצמתים בעץ הוא בדיוק n.

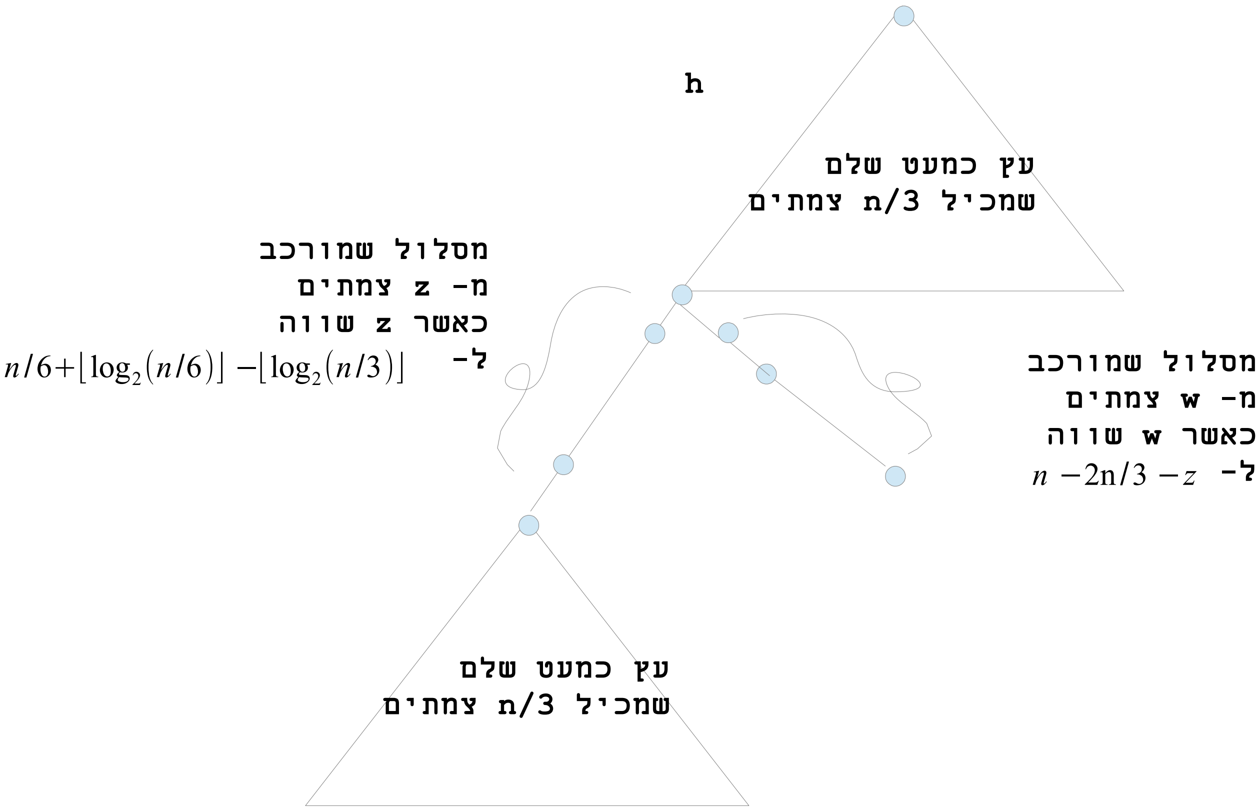
2) יש בעץ לפחות $\frac{n}{12}$ צמתים שהרמה שלהם גדולה מ- $\log_2(\frac{n}{3})-2$ וקטנה מ- $\log_2(\frac{n}{3})+1$.

3) יש בעץ לפחות $\frac{n}{12}$ צמתים שהרמה שלהם
גדולה מ- $\frac{n}{6}+\log_2(\frac{n}{3})+\log_2(\frac{n}{6})-4$
וקטנה מ- $\frac{n}{6}+\log_2(\frac{n}{3})+\log_2(\frac{n}{6})+4$

4) יש בעץ לפחות $\frac{n}{6}-1$ עלים.

פתרון שאלה 1

נסתכל על העץ שבציור הבא ונראה שהוא עונה על כל הדרישות שבשאלה.



העץ מקיים את דרישה 1 כי:

מספר הצמתים בעץ = $n/3 + n/3 + z + w = n$

העץ העליון, העץ התחתון, המסלול שהולך שמאלה, המסלול שהולך ימינה

לפי טענה 10 בעץ העליון יש לפחות $n/12 < \frac{n/3+1}{4}$ צמתים שהרמה שלהם גדולה או שווה ל- $\log_2((n/3)+1)-1$ וקטנה או שווה ל- $\log_2(n/3)$.

ולכן בעץ העליון יש לפחות n/12 צמתים שהרמה שלהם גדולה מ- $\log_2(n/3)-2$ וקטנה מ- $\log_2(n/3)+1$, ולכן דרישה 2 מתקיימת.

באופן דומה לפי טענה 10 בעץ התחתון יש לפחות n/12 צמתים שהמרחק שלהם מהשורש של העץ התחתון גדול מ- $\log_2(n/3)-2$ וקטן מ- $\log_2(n/3)+1$. נסמן ב- r את הרמה של הצמתים האלה. כדי לקבל את הרמה r של הצמתים האלה צריך להוסיף למרחק שלהם מהשורש של העץ התחתון את אורך המסלול z ועוד גובה העץ העליון שנסמנו h.

לכן נקבל:

(1) $z+h+\log_2 n/3-2<r<z+h+\log_2(n/3)+1$

על סמך טענה 6 על העץ העליון נקבל:

(2) $\log_2(n/3+1)\le h\le 1+\log_2(n/3)$

מ- (1) ו- (2) נקבל:

(3) $z+2\log_2 n/3-2<r<z+2\log_2(n/3)+2$

נציב את הערך של z ב- (3) ונקבל:

(4) $n/6+\lfloor\log_2(n/6)\rfloor-\lfloor\log_2(n/3)\rfloor+2\log_2 n/3-2<r<n/6+\lfloor\log_2(n/6)\rfloor-\lfloor\log_2(n/3)\rfloor+2\log_2(n/3)+2$

כדי לפשט את החישוב בנוסחה האחרונה נחליף את הערך השלם תחתון בערך הרגיל (גם לכם מותר לעשות את זה לצורך פישוט החישוב).

ונקבל מ- (4):

(5) $n/6+\log_2(n/6)+\log_2(n/3)-2<r<n/6+\log_2(n/6)+\log_2(n/3)+2$

מ- (5) נקבל שיש לפחות n/12 צמתים שהרמה שלהם r מקיימת:

(6) $n/6+\log_2(n/6)+\log_2(n/3)-4<r<n/6+\log_2(n/6)+\log_2(n/3)+4$

ולכן דרישה 3 מתקיימת.

לעץ שצירנו יש לפחות n/6 עלים כי: מטענה 8 נובע שלעץ הכמעט שלם העליון יש לפחות n/12 -1 עלים (הורדנו עלה אחד בגלל המסלולים שיוצאים מהצומת השמאלי ברמה התחתונה בעץ) למסלול שהולך ימינה יש עלה אחד, ולעץ הכמעט שלם התחתון יש לפחות n/12 עלים, ולכן סך הכל לעץ שצירנו יש לפחות n/6 עלים, ולכן גם דרישה 4 מתקיימת.

2. שאלה זו הופיעה במבחן מועד ב 2016

הוכח שלכל מספר שלם חיובי n שמתחלק ב- 6 (ללא שארית) וגדול מ- 32 קיים עץ בינארי שמקיים את כל ארבעת התנאים הבאים:

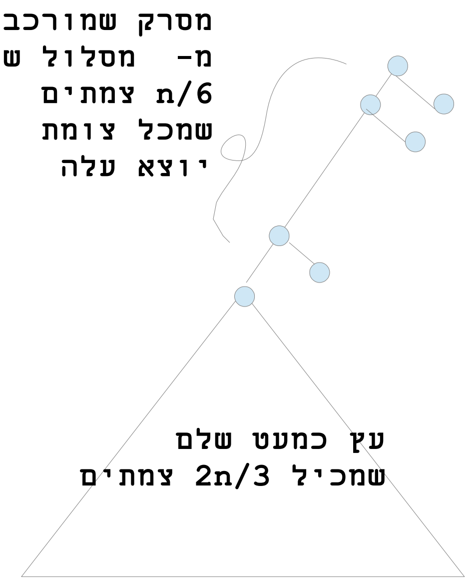
1) מספר הצמתים בעץ הוא בדיוק n.

2) יש בעץ לפחות $\frac{n}{6}$ צמתים שהרמה שלהם גדולה מ- $\frac{n}{6}+\log_2(\frac{2n}{3})-3$ וקטנה מ- $\frac{n}{6}+\log_2(\frac{2n}{3})+2$.

3) יש בעץ לפחות $\frac{n}{3}-1$ עלים.

פתרון שאלה 2

נסתכל על העץ שבציור הבא ונראה שהוא עונה על כל הדרישות שבשאלה.



העץ מקיים את דרישה 1 כי:

$$n = n/3 + 2n/3 = \text{מספר הצמתים בעץ}$$

(n/3 – המסרק; 2n/3 – העץ התחתון)

לפי טענה 10 בעץ התחתון יש לפחות $\frac{2n/3+1}{4} > n/6$ צמתים שהמרחק שלהם מהשורש של העץ התחתון גדול מ- $\log_2(2n/3)-2$ וקטן מ- $\log_2(2n/3)+1$. נסמן ב- r את הרמה של הצמתים האלה. כדי לקבל את הרמה r של הצמתים האלה צריך להוסיף למרחק שלהם מהשורש של העץ התחתון את אורך המסלול של המסרק שהוא n/6

לכן נקבל:

$$(1)\quad n/6+\log_2 2n/3-2<r<n/6+\log_2(2n/3)+1$$

מ- (1) נקבל שיש לפחות n/6 צמתים שהרמה שלהם r מקיימת:

$$(2)\quad n/6+\log_2 2n/3-3<r<n/6+\log_2(2n/3)+2$$

ולכן דרישה 2 מתקיימת.

לעץ שצירנו יש לפחות n/3 עלים מאחר ומכל אחד מ- n/6 הצמתים שבמסלול של המסרק יוצא עלה, ובנוסף לכך לפי טענה 8 לעץ התחתון יש לפחות $\frac{2n/3+1}{4} > n/6$ עלים, ובסך הכל מספר העלים גדול מ- n/3.

3. שאלה זו הופיעה במבחן מועד ג 2016

הוכח שלכל מספר שלם חיובי n שמתחלק ב- 8 (ללא שארית) וגדול מ- 32 קיים עץ בינארי שמקיים את כל שלושת התנאים הבאים:

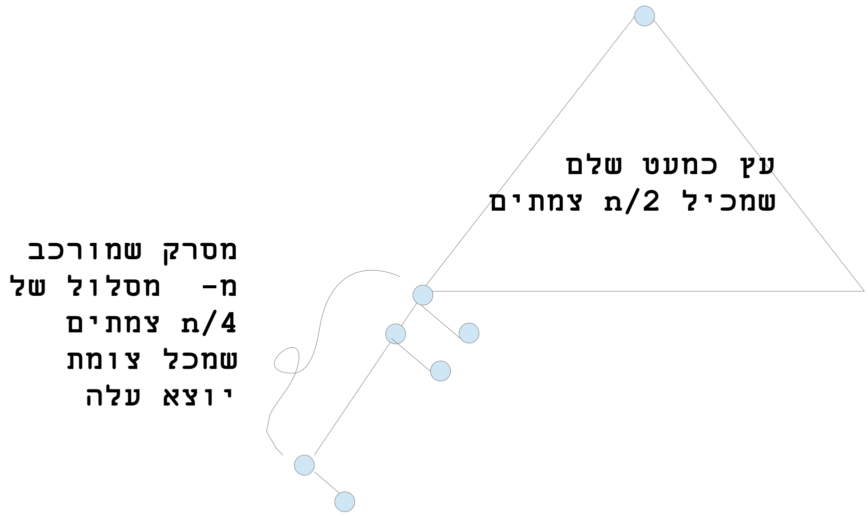
1) מספר הצמתים בעץ הוא בדיוק n.

2) יש בעץ לפחות $\frac{n}{8}$ צמתים שהרמה שלהם גדולה מ- $\log_2(\frac{n}{2})-2$ וקטנה מ- $\log_2(\frac{n}{2})+2$.

3) יש בעץ לפחות $\frac{3n}{8}-1$ עלים.

<u>פתרון שאלה 3</u>

נסתכל על העץ שבציור הבא ונראה שהוא עונה על כל הדרישות שבשאלה.



העץ מקיים את דרישה 1 כי:

n = n/2 + n/2 = מספר הצמתים בעץ

המסרק   העץ העליון

לפי טענה 10 בעץ העליון יש לפחות $\frac{n/2+1}{4}>n/8$ צמתים שהרמה שלהם גדולה או שווה ל- $\log_2((n/2)+1)-1$ וקטנה או שווה ל- $\log_2(n/2)$.
ולכן בעץ העליון יש לפחות n/8 צמתים שהרמה שלהם גדולה מ- $\log_2(n/2)-2$ וקטנה מ- $\log_2(n/2)+2$, ולכן דרישה 2 מתקיימת.

לעץ שצירנו יש לפחות 3n/8-1 עלים מאחר ומכל אחד מ- n/4 הצמתים שבמסלול של המסרק יוצא עלה, ובנוסף לכך לפי טענה 8 לעץ התחתון יש לפחות $\frac{n/2+1}{4}-1>n/4-1$ עלים, (המינוס אחד הוא בגלל שהצומת השמאלי ביותר ברמת העלים בעץ העליון אינו עלה), ובסך הכל מספר העלים הוא לפחות 3n/8-1, ודרישה 3 מתקיימת.