# <u>הרצאה 4</u>

**בתכנית merge_sort הגענו לנוסחת נסיגה במבנה הבא:**

$T(n) <= C1 + 2T(n/2) + Dn$

**ופתרנו אותה בשיטת ההצבה.**

**מה היה קורה אם הינו מנתחים קוד אחר שנוסחת הנסיגה שלו היתה מהצורות הבאות:**

$T(n)=C1 + 2T(n/3) + Dn$

$T(n)=C1 + 2T(n/3) + Dn^2$

$T(n)=C1 + 4T(n/5) + Dn^2$

**או באופן כללי מהצורה הבאה:**

$T(n)=aT(n/b) + f(n)$

**כאשר** $a \geq 1$ **ו-** $b > 1$ **ו- f(n) היא פונקציה שתלויה ב- n.**

**כאשר הפעילו את שיטת ההצבה על הנוסחה האחרונה קיבלו תוצאה שנקראת משפט המסטר ומאפשרת להסיק ישר את הסיבוכיות. משפט המסטר מבחין בין שלושה מקרים ובכל מקרה התוצאה שונה.**

**להלן דוגמאות של כל אחד מ- 3 המקרים:**

$T(n)=C1 + 2T(n/3) + Dn$

**מקרה 1:**

$T(n)=C1 + 2T(n/3) + D\log_2 n$

**a=2 b=3** $n^{\log_b a} = n^{\log_3 2}$ $> f(n)=C1+D\log_2 n$

**לפי מקרה 1 של משפט המסטר :** $T(n) = \theta(n^{\log_3 2})$

**מקרה 2:**

**T(n)=C1 +3T(n/3) +Dn**

**a=3 b=3** $n^{\log_b a} = n^{\log_3 3}$ **= f(n)=C1+Dn**

**לפי מקרה 2 של משפט המסטר :** $T(n)=\theta(nlogn)$

**מקרה 3:**

**a=2 b=3** $n^{\log_b a} = n^{\log_3 2}$ **< f(n)=C1+Dn**

**לפי מקרה 3 של משפט המסטר :** $T(n)=\theta(n)$

**הדוגמה הבאה לא מתאימה למבנה של משפט המסטר:**

**T(n)=C1+T(n/6)+2T(n/10)+Dn**

**אבל מהדוגמה הנ"ל נובע ש-**

**T(n)<=C1+T(n/6)+2T(n/6)+Dn**

**ששקול ל-**

**T(n)<=C1+3T(n/6)+Dn**

**הדוגמה הנ"ל מתאימה למבנה של משפט המסטר**
**אבל בגלל שבנוסחה יש => במקום = אז המסקנה**
**תהיה O במקום θ**

**a=3 b=6** $n^{\log_b a} = n^{\log_6 3}$ **< f(n)=C1+Dn**

**->T(n)=O(n)**

**מצד שני מהנוסחה הראשונה נובע ש:**

**T(n)>=C1+T(n/10)+2T(n/10)+Dn**

**ששקול ל-**

**T(n)>=C1+3T(n/10)+Dn**

**הדוגמה הנ"ל מתאימה למבנה של משפט המסטר**
**אבל בגלל שבנוסחה יש =< במקום = אז המסקנה**
**תהיה Ω במקום θ**

**a=3 b=10** $n^{\log_b a} = n^{\log_{10} 3}$ **< f(n)=C1+Dn**

**->T(n)=Ω(n)**

**ולכן בגלל שה- $O$ וה- $\Omega$ שווים הראנו שמתקיים $T(n)=\theta(n)$**

**נחזור על התהליך הנ"ל  על דוגמה נוספת:**

**$T(n)=T(n/3)+T(2n/3)+n$**

**$T(n)<=2T(2n/3)+n$**

**a=2 b=3/2** $n^{\log_b a}=n^{\log_{3/2} 2}$ **f(n)=n**
**->T(n)=O(** $n^{\log_{3/2} 2}$ **)**

**$T(n)>=2T(n/3)+n$**

**a=2 b=3** $n^{\log_b a}=n^{\log_3 2}$ **f(n)=n**
**->$T(n)=\Omega(n)$**

**בדוגמה הנ"ל הגענו ל- $O$ ו- $\Omega$ שאינם שווים ולכן לא נוכל להגיע ל- $\theta$ בשיטה הנ"ל.**

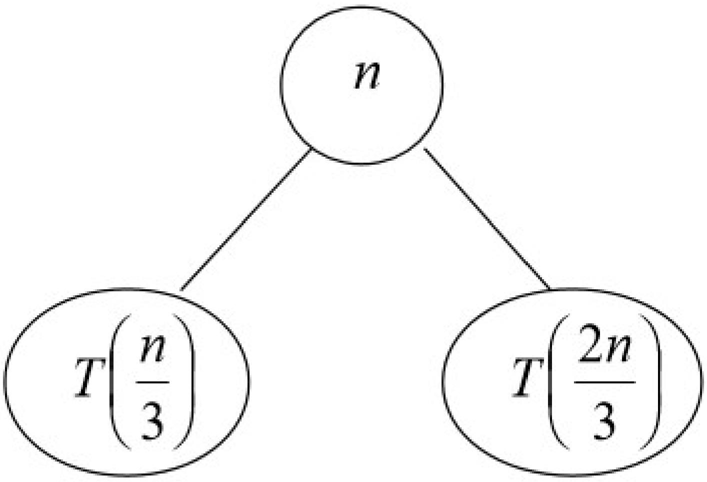
**כדי להגיע ל- $\theta$ בדוגמה הנ"ל נשתמש בשיטה אחרת שנקראת שיטת עץ רקורסיה שנציג להלן.**

## שיטת עץ רקורסיה

**נסתכל על הנוסחה הבאה:**

$$T(n)=T(n/3)+T(2n/3)+n$$

**נציג אותה כעץ שנראה כך:**



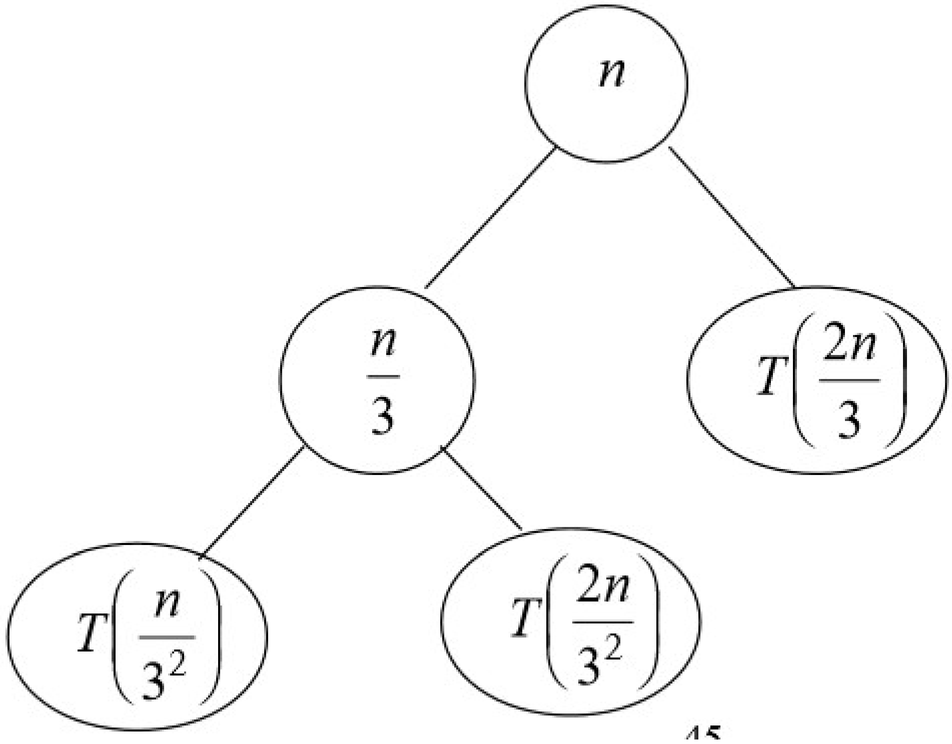

**את האיבר החופשי שמים בשורש ואת שני האיברים עם ה- T שמים כבנים שלו, כאשר את הקטן משני הבנים שמים בצד שמאל.**
**התכונה של העץ הנ"ל היא שסכום כל האיברים בעץ שווה ל- $T(n)$**

**כעת נמשיך לפתח את העץ הנ"ל. נציב $n/3$ במקום $n$ בנוסחה המקורית ונקבל:**

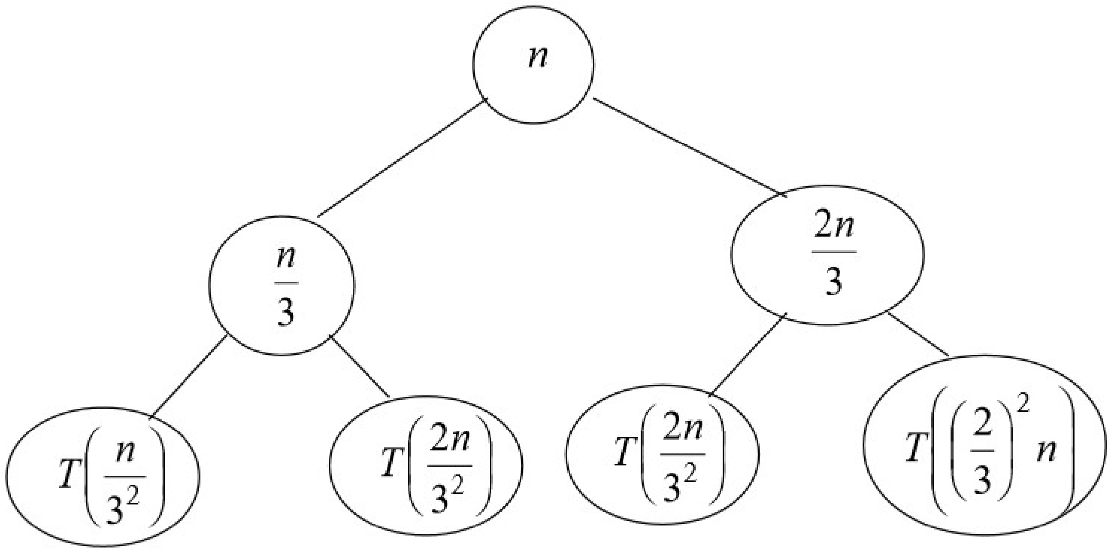
$$T(n/3)=T(n/3^2)+T(2n/3^2)+n/3$$

**נציב את $T(n/3^2)+T(2n/3^2)+n/3$ במקום $T(n/3)$ בעץ המקורי ונקבל:**

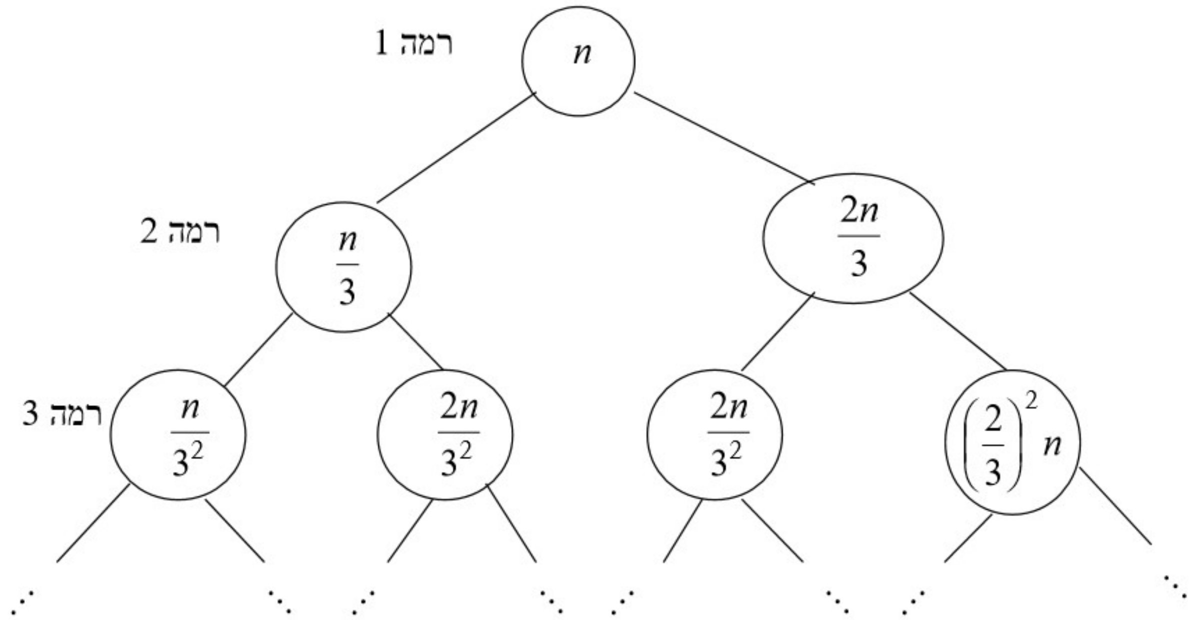
**את העץ הבא:**




**נמשיך את התהליך גם עבור $T(2n/3)$ ונקבל את העץ הבא:**




**אם נמשיך את התהליך נקבל את העץ הבא:**




**האיבר השמאלי ביותר ברמה 3 התקבל כתוצאה מחישוב של** $T(\frac{n}{3^2})$ **באופן כללי האיבר השמאלי ביותר ברמה i התקבל מחישוב של** $T(\frac{n}{3^{i-1}})$

**שימו לב שמה שבתוך ה- T בחישוב האחרון הולך וקטן ככל שעולים ברמה. באיזשהו שלב מה שבתוך ה- T יהיה קטן מ- 1**

**ואז הוא יהיה שווה ל- 0. כי בנוסחאות הנסיגה שמגיעות מקוד בדרך כלל הנסיגה נעצרת כאשר מה שבתוך ה- T קטן מ- 1.**

**לכן רמה תהיה מלאה כל עוד מה שבתוך ה- T שממנו מתקבלים האיברים ברמה יהיה גדול מ- 1. לאחר מכן הרמה לא תהיה מלאה כי לא נשאיר בעץ איברים שהערך שלהם הוא 0.**

**נסמן ב-**

**x מספר הרמות בעץ**
**y מספר הרמות המלאות בעץ**

**בדוגמה הזאת סכום כל הרמות זהה ושווה ל- n**

**האיבר הקטן ביותר בכל רמה נמצא בצד שמאל והגדול ביותר בצד ימין**

**האיבר הקטן ביותר ברמה i שווה ל-** $\frac{n}{3^{i-1}}$

**האיבר הקטן ביותר ברמה y שווה ל-** $\frac{n}{3^{y-1}}$

**אם היה איבר ברמה y+1 אז האיבר הקטן ביותר ברמה y+1 היה מתקבל כתוצאה מחישוב של** $T\left(\frac{n}{3^{y}}<1\right)$ **אבל האיבר הזה לא קיים ולכן מה שבתוך ה- T חייב להיות קטן מ- 1:**

**ולכן נקבל:** $\frac{n}{3^{y}}<1$

**ששקול ל-**

$$n < 3^y$$

**ששקול ל-**

$$\log_3 n < y$$

**ולכן נקבל:**

$$T(n) \geq \underbrace{n + n + \ldots + n}_{y \text{ פעמים}} = ny > n\log_3 n = \theta(n\log n)$$

**ולכן הראנו שמתקיים:**

$$T(n) = \Omega(n\log n)$$

**לכוון השני.**

**האיבר הגדול ביותר בכל רמה נמצא בצד ימין ו**

**האיבר הגדול ביותר ברמה i שווה ל-** $\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} n$

**האיבר הגדול ביותר ברמה x שווה ל-** $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} n$

**האיבר הגדול ביותר ברמה x התקבל כתוצאה של**

$$T\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} n\right)$$

**מאחר והאיבר הזה קיים (ואינו 0) מה שבתוך ה- T חייב להיות גדול או שווה ל- 1. ולכן נקבל ש-**

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} n \geq 1$$

**ששקול ל-**

$$n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$$

**ששקול ל-**

$$\log_{3/2} n \geq x-1$$

**ששקול ל-**

$$x \leq \log_{3/2} n+1$$

**מאחר וסכום כל רמה מלאה שווה ל- n**
**וסכום כל רמה שאינה מלאה קטן או שווה ל- n**
**ובעץ יש בסך הכל x רמות נקבל:**

$$T(n) \leq \underbrace{n+n+\ldots+n}_{x \text{ פעמים}} = nx \leq n(\log_{3/2} n+1) = \theta(nlogn)$$

**ולכן הראנו שמתקיים:**

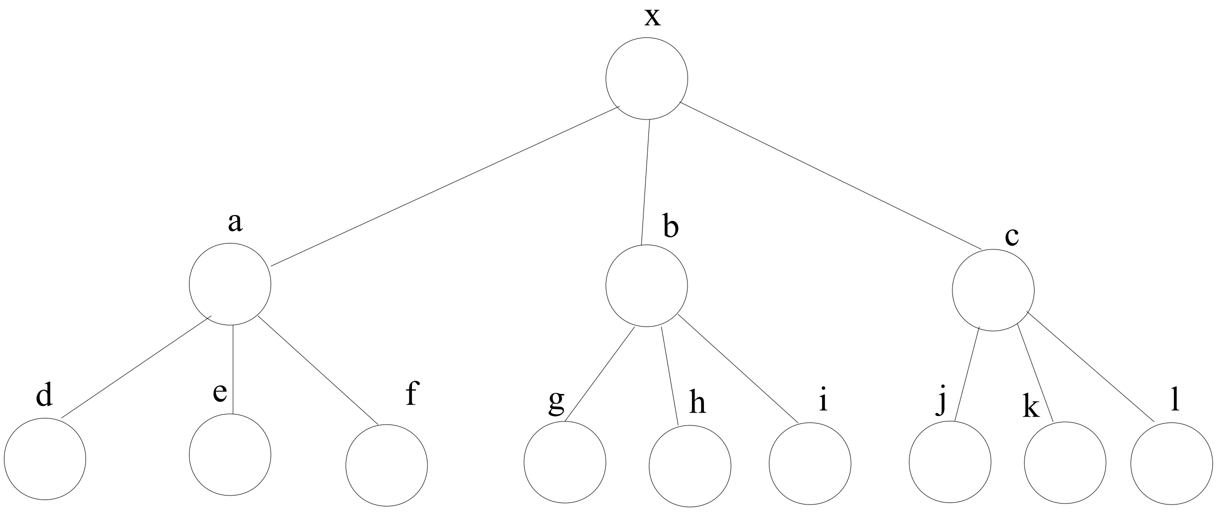
$$T(n) = O(nlogn)$$

**בגלל שה- O וה- Ω שווים הראינו שמתקיים:**

$$T(n) = \theta(nlogn)$$

**בדוגמה הנ"ל כל הרמות היו שוות.**

**באופן כללי נסתכל על העץ הבא:**




**נניח ש-** $a+b+c=qx$

**דהינו סכום הבנים ברמה השניה שווה ל- q כפול השורש.**

**בעצים מהסוג הנ"ל סכום הבנים של כל צומת שווה ל- q כפול הצומת ולכן:**

$$d+e+f=a\cdot q$$

$$g+h+i=b\cdot q$$

$$j+k+l=c\cdot q$$

**לכן נקבל שסכום האיברים ברמה השלישית שווה ל-**

$$d+e+f+g+h+i+j+k+l=a\cdot q+b\cdot q+c\cdot q=(a+b+c)\cdot q=x\cdot q\cdot q=x\cdot q^2$$

**באופן דומה נקבל שסכום האיברים ברמה הרביעית שווה ל-** $x\cdot q^3$ **וכן הלאה.**

**במקרה ש- q=1 סכום כל הרמות זהה ואת זה ראינו בדוגמה הקודמת. במקרה שבו- q<1 סכום הרמות הולך וקטן ובסופו של דבר הסיבוכיות יוצאת שווה לשורש. המקרה הזה מודגם בדוגמה 2 בעמוד 51 בחוברת.**

**במקרה שבו- $q>1$ סכום הרמות הולך וגדל. במקרה הזה שיטת עץ הרקורסיה לא מגיעה להערכה של $\theta$ בגלל שה- $O$ וה- $\Omega$ שונים. במקרה הזה אי אפשר להגיע ל- $\theta$ גם בשיטות אחרות אבל אפשר בשיטות נומריות להתקרב להערכה של $\theta$ לכל רמת דיוק שנרצה.**

**המקרה שבו- $q>1$ מודגם בדוגמה 3 בעמוד 54 בחוברת.**