וקטורים

הגדרה 1.
סידרה בת n איברים $a_1,...,a_n$ שאיבריה מספרים ממשיים נקראת n-יה סדורה או n-וקטור (או וקטור). מספרים $a_1,...,a_n$ נקראים רכיבים של ה-n-יה. ה n-יה עצמה מסומנת כ- $(a_1,...,a_n)$.
כאשר $n=2$ נקבל שני רכיבים בלבד, לכן נאמר זוג סדור במקום 2-יה סדורה, כאשר $n=3$ נאמר שלשה סדורה וכו'. מספר רכיבים ב n-יה נקרא אורך ה n-יה.

דוגמה 1.
הסדרה $(1,-2)$ היא דוגמה של זוג סדור. הסדרה $(0,\frac{1}{2},\sqrt{2},-1)$ היא רביעיה סדורה, הרכיב הראשון שלה שווה ל- 0, השני שווה ל- $\frac{1}{2}$, השלישי שווה ל- $\sqrt{2}$ והרביעי - -1.

כדי להבדיל בין וקטורים לבין מספרים ממשיים אנו נסמן וקטורים ע"י אותיות לטיניות עם קו למלה, למשל $\bar{a}=(0,1,2,3)$.

סדר הרכיבים (מספרים) בתוך הוקטור הינו חשוב מאוד. שינוי הסדר משנה גם את הוקטור. למשל, $(1,2,3)\neq(3,2,1)$.

שוויון בין וקטורים.
שני וקטורים $\bar{a}=(a_1,...,a_m),\bar{b}=(b_1,...,b_k)$ שווים אם ורק אם הם מקיימים שני תנאים:
א. $m=k$.
ב. הרכיבים של הוקטורים שווים בהתאם, כלומר הרכיב הראשונים שווים זה לזה, השניים וכו'.
בכתיב מתמטי $a_1=b_1,a_2=b_2...,a_m=b_m$.

הערה. שני וקטורים לא ניתן להשוות אם מספר הרכיבים שלהם שונה. למשל,
$(-1,3,-2)\neq(-1,3,-2,0)$.

פעולות עם וקטורים.

חיבור וחיסור.

אם $\bar{a}=(a_1,a_2,...,a_n),\bar{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ אז

$$\bar{a}\pm\bar{b}:=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,...,a_n\pm b_n)$$

הערה: לא ניתן לחבר וקטורים מאורכים שונים, למשל הסכם $(0,1,2)+(1,2)$ אינו מוגדר.

מכוון שחיבור וחיסור של וקטורים מוגדר לפי רכיביהם, הפעולות האלה מקיימות את רוב החוקים שמתקיימים לפעולות חיבור וחיסור של המספרים הממשיים. להלן מופיעים את החוקים האלה.

A1. אם $\bar{a},\bar{b}\in\mathbf{R}^n$ אז $\bar{a}+\bar{b}\in\mathbf{R}^n$.

A2. חוק קומוטטיבי (חוק החילוף).
לכל שני וקטורים $\bar{a},\bar{b}$ מאותו האורך מתקיים $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$.

A3. חוק אסוציאטיבי (חוק הקיבוץ)

לכל שלושה וקטורים $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ מאותו האורך מתקיים $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$.

A4. קיום וקטור-האפס.
קיים וקטור-אפס $\bar{0}_n=(0,...,0)$ כך שלכל $\bar{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ מתקיים $\bar{a}+\bar{0}=\bar{0}+\bar{a}=\bar{a}$.

A5. קיום וקטור נגדי.
ללכל וקטור $\bar{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ קיים וקטור נגדי $-\bar{a}=(-a_1,-a_2,...,-a_n)$ כך ש
$\bar{a}+(-\bar{a})=(-\bar{a})+\bar{a}=\bar{0}$.

<u>כפל בסקלר(מספר)</u>

כל וקטור $\bar{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ ניתן להכפיל בכל סקלר (מספר) b:
$b\cdot\bar{a}:=(ba_1,ba_2,...,ba_n)$.

<u>תכונות של הכפל:</u>
M1. לכל מספר $b\in\mathbf{R}$ ולכל וקטור $\bar{a}\in\mathbf{R}^n$ מתקיים $b\cdot\bar{a}\in\mathbf{R}^n$.

M2. חוק אסוציאטיבי $c\cdot(b\cdot\bar{a})=(c\cdot b)\cdot\bar{a}$.

M3. חוק היחידה $1\cdot\bar{a}=\bar{a}$.

D1. חוק דיסטריבוטיבי (חוק הפילוג) שמאלי: $c(\bar{a}+\bar{b})=c\bar{a}+c\bar{b}$.

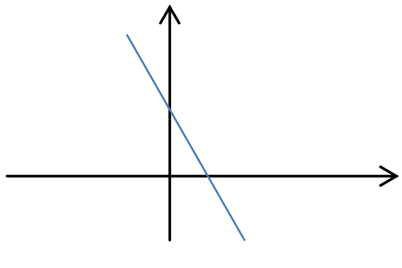
D2. חוק דיסטריבוטיבי (חוק הפילוג) ימני: $(b+c)\bar{a}=b\bar{a}+c\bar{a}$.

משוואות לינאריות

<u>משוואה לינארית</u>: $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=b$.
$x_1,x_2,...,x_n$ - <u>נעלמים/משתנים</u> של המשוואה,
$a_1,a_2,...,a_n,b$ - <u>מקדמים</u> של המשוואה (מספרים קבועים), b מקדם <u>חופשי</u>.

וקטור $\bar{v}=(v_1,...,v_n)$ נקרא <u>פתרון</u> (פרטי או מספרי) המשוואה $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=b$ אם אחרי ההצבה $x_1\leftarrow v_1,...,x_n\leftarrow v_n$ המשוואה תהפוך לזהות מספרית. למשל הוקטור $(\sqrt{2},1,2)$ הינו פתרון של המשוואה $\sqrt{2}\cdot x_1-x_2+0.5x_3=2$.

אוסף של כל הפתרונות של המשוואה נקרא <u>קבוצת הפתרונות</u> שלה. למשל קבוצת הפתרונות של המשוואה $x+2y=2$ היא אוסף של כל הזוגות מהצורה $(t,1-0.5t)$ כאשר t הינו פרמטר חופשי שיכול לקבל ערך מספרי כלשהו. מבחינה גאומרטאית קבוצת הפתרונות של המשוואה $x+2y=2$ היא קו ישר $y=1-0.5x$:



מערכת שבה יש m משוואות לינאריות שכל אחת מהן מכילה n נעלמים נקראת <u>ממ"ל מסדר $m\times n$</u>.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{11}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ...... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

וקטור $\bar{v} = (v_1,...,v_n)$ נקרא פתרון (פרטי או מספרי) של המערכת כאשר הוא מקיים כל אחת מהמשוואות שלה. אוסף של כל הפתרונות של המערכת נקראת <u>קבוצת הפתרונות</u> שלה.

דוגמא. ממ"ל מסדר 2×3:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

הוקטור $(1,-1,0)$ הינו פתרון פרטי של הממ"ל. לאומת זאת הוקטור $(1,1,-2)$ אינו פתרון, כי לא מקיים את המשוואה השנייה.

הגדרה 2. שתי מערכות משוואות לינאריות נקראות <u>שקולות</u> אם יש להן אותם פתרונות, ז"א קבוצות הפתרונות שלהם שוות זו לזו.

הפעולות הבאות לא משנות את הקבוצת הפתרונות של ממ"ל:

א. החלפת סדר המשוואות.
ב. כפל משוואה כלשהי בסקלר (מספר) שונה מאפס.
ג. הוספת משוואה אחת כפולה במספר כלשהו למשוואה אחרת.

דוגמא. נביט בממ"ל $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \\ -x + y + 2z = -8 \end{cases}$ נחלץ נעלם x מהמשוואה השנייה בעמצאות המשוואה הראשונה. לצורך זה נחסיר מהמשוואה השנייה את הראשונה כפולה ב-2 (פעולה מסוג ג'). נקבל $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -y - 4z = 0 \\ -x + y + 2z = -8 \end{cases}$. כדי להפתר מ-$x$ מהמשוואה השלישית נוסיף לה את המשוואה הראשונה. נקבל

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -y - 4z = 0 \\ 3y + 5z = -7 \end{cases}.$$

עכשיו נחלץ את ה-y מהמשוואה השלישית. לצורך זה נוסיף לה את המשוואה השנייה כפולה ב-3. נקבל

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -y - 4z = 0 \\ -7z = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3\cdot 1 = 1 \\ -y - 4\cdot 1 = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2\cdot(-4) + 3\cdot 1 = 1 \\ y = -4 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -4 \\ z = 1 \end{cases}.$$

אז לממ"ל המקורית יש פתרון יחיד $x = 6, y = -4, z = 1$ או $(x,y,z) = (6,-4,1)$.