שיטת החילוץ של Gauss-Jordan.

נתונה ממ"ל $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{11}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{21}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$. כדי לפתור את המערכת בונים את <u>המטריצה המורחבת</u>

שלה $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & | & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$. לאחר מכך מביאים אותה <u>לצורה מדורגת קנונית</u> (תהליך החילוץ/דירוג/איפוס). בתהליך זה ניתן להשתמש ב 3 סוגים של <u>פעולות שורה אלמנטריות</u>:

1. החלפת בין השורות i ו j. סימון $R_i \leftrightarrow R_j$.
2. כפל שורה בסקלר כלשהו השונה מאפס. סימון $R_i \leftarrow aR_i$ ($a \neq 0$).
3. הוספת שורה R_j כפולה בסקלר כלשהו a לשורה אחרת R_i. סימון $R_i \leftarrow R_i + aR_j$. יש לציין ש- $j \neq i$.

שתי מטריצות מאותו הסדר נקראות <u>שקולות</u> כאשר אחת מהן ניתן לקבל מהשנייה ע"י מספר פעולות שורה אלמנטריות.

מטריצה A מסדר $m \times n$ נקראת <u>מדורגת</u> אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

1. כל שורות-האפס של A נמצאות מתחת לשורות השונות מאפס.
2. האיבר-הפותח של שורה שונה מאפס נמצא מימין מהאיבר הפותח של השורה הקודמת.
   איבר <u>פותח/מוביל</u> של השורה הינו האיבר הראשון (משמאל) בשורה ששונה מאפס.

מטריצה מדורגת נקראת מטריצה מדורגת קנונית כאשר כל האיברים הפותחים שלה שווים ל-1 וכל הרכיבים שלה הנמצאים מעל לאיברים הפותחים שווים לאפס.

מטריצה מדורגת:

$$\begin{pmatrix} 0\ldots & * & & & & & & & & \\ 0\ldots & 0 & 0\ldots & * & & & & & & \\ 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & * & & & & \\ 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & * & & \\ 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & *\ldots \\ 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0\ldots \\ 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0\ldots \end{pmatrix}$$

מטריצה מדורגת קנונית:

$$\begin{pmatrix}
0\ldots & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0\ldots \\
0\ldots & 0 & 0\ldots & 1 & & 0 & & 0 & & 0\ldots \\
0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 1 & & 0 & & 0\ldots \\
0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 1 & & 0\ldots \\
0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 1\ldots \\
0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0\ldots \\
0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0\ldots
\end{pmatrix}$$

הכוכבים מסמנים את האיברים הפותחים (הם שונים מאפס). כל הרכיבים של המטריצה מתחת לקו שווים לאפס.

בתהליך הדירוג יש 2 שלבים. בשלב הראשון יש להביא את המטריצה לצורה מדורגת ע"י פעולות שורה אלמנטריויות. כיוון הפעולות כלפי מטה. אם בתהליך הדירוג מתקבלת שורת אי-עיקביות (השורה שבה כל הרכיביה פרט מהרכיב האחרון שווים לאפס והרכיב האחרון שונה מאפס) אז לממ"ל אין פתרון וניתן לעצור את התהליך. בשלב השני מתחילים מהשורה האחרונה השונה מאפס, מחלקים אותה באיבר הפותח ואז מאפסים את כל הרכיבים מעל הפותח. אז עוברים לשורה שמעליה ופועלים בצורה דומה. כך ממשיכים עד שנגיע לצורה קנונית. כוון התהליך בשלב השני הוא כלפי מעלה.

משפט. כל מטריצה ניתן להביא לצורה מדורגת קנונית ע"י פעולות שורה אלמנטריות.

בניית פתרון של ממ"ל.

לממ"ל אין פתרון אם ורק אם בתהליך הדירוג התקבלה שורת אי-עיקביות (במקרה הזה המערכת נקראת לא עיקבית).

אם הגענו למטריצה הדקנונית (ז"א בתהליך הדירוג לא התקבלה שורת אי-עיקביות) אז ישנן שתי אפשרויות: א) לממ"ל יש פתרון יחיד או ב) לממ"ל יש אינסוף פתרונות. האפשרות הראשונה מתממשת אם ורק אם מספר האיברים הפותחים בצורה קנונית שווה למספר הנעלמים. אחרת (ז"א שמספר הפותחים קטן ממספר הנעלמים) יש אינסוף פתרונות.

<u>דרגת המטריצה</u> היא מספר שורות שנות מאפס בצורה מדורגת קנונית שלה (סימון $rank(A)$).

משפט 1. אם $(A|B)$ מטריצה מורחבת של ממ"ל מסדר $m\times n$, אז

א. לממ"ל אין פתרון אם ורק אם $rank(A) < rank(A|B)$.

ב. לממ"ל יש פתרון יחיד אם ורק אם $rank(A) = rank(A|B) = n$.

ג. לממ"ל יש אינסוף פתרונות אם ורק אם $rank(A) = rank(A|B) < n$.

במקרה ג' בונים פתרון כללי של הממ"ל. לצורך זה מחלקים את כל הנעלמים/משתנים לשני סוגים: משתנים חופשיים ומשתנים תלויים (קשורים) לפי הכלל הבא: משתנים שמתאימים לאיברים הפותחים של המטריצה הקנונית יהיו תלויים, שאר המשתנים יהיו חופשיים. מספר המשתנים התלויים שווה לדרגת המטריצה $rank(A)$ ומספר החופשיים שווה ל- $n - rank(A)$.

דוגמא לחלק ג'. נניח שקבלנו את המטריצה הקנונית הבאה:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

דרגת המטריצה שווה ל-2. לכן ישנם 2 משתנים תלוים בלבד: x_1, x_3 (מכוון שהאיברים הפותחים נמצאים בעמודות 1 ו 3). שאר המשתנים: x_2, x_4, x_3 יהיו חופשיים. כל שורה של המטריצה הקנונית נהפוך למשוואה לינארית ואז נבודד את המשתנים התלויים:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_3 &= 1 \qquad - 2x_4 + 2x_5 \end{aligned} .$$

אז הפתרון הכללי הוא $(1-2x_2+x_4-3x_5, x_2, 1-2x_4+2x_5, x_4, x_5)$.

טענה 2. אם בממ"ל מסדר $m \times n$ מספר הנעלמים (n) גדול ממספר המשוואות (m) אז למערכת אין פתרון יחיד.

הוכחה.לפי משפט 2 למערכת יש פתרון יחיד כאשר דרגת המערכת r שווה למספר הנעלמים n. המצב הזה לא יכול להתממש מכוון ש-$r \le m < n$. מ.ש.ל.