**רישום מערכת משוואות בצורה מטריציאלית.**

נביט בממ"ל

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{11}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ...... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

נגדיר 3 מטריצות: מטריצת המערכת $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ , מטריצת-עמודה $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ של הנעלמים ומטריצת-עמודה $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$ של המקדמים החופשיים של הממ"ל. נציין שהסדרים של המטריצות $A, X, B$ הם $m \times n, n \times 1, m \times 1$ בהתאם. עכשיו את המערכת הקודמת ניתן לכתוב בצורה מטריציאלית $A \cdot X = B$ . וקטור $\bar{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ יהיה פתרון פרטי (מספרי) של (*) אם ורק אם הוא מקיים את השוויון $A \cdot \bar{v}^T = B$ .

הגדרה. מטריצה $B$ נקראת מטריצה <u>הפוכה</u> למטריצה $A$ אם היא מקיימת את התנאי $AB = BA = I_n$ .
מטריצה שיש לה הפוכה נקראת <u>הפיכה</u>.
מהגדרה הזאת נובע שמטריצה הפיכה צריכה להיות מטריצה ריבועית מסדר $n$ .

דוגמא. שתי מטריצות $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$ מקיימות $AB = I_2, BA = I_2$ . לכן $A$ הפוכה ל- $B$ וגם $B$ הפוכה ל- $A$ . כל אחת מהמטריצות $A, B$ הפיכה.

טענה 1. לכל מטריצה $A \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$ יש לכל היותר הפוכה אחת.

הוכחה. נניח ש- $B, C$ מטריצות הפוכות ל- $A$ (לא בהכרח שונות זו מזו). נוכיח ש- $B = C$ . מהגדרת ההפוכה נובע ש- $AB = BA = I_n$ ו $AC = CA = I_n$ . אז מהחוק האסוציאטיבי נובע ש- $(BA)C = B(AC)$ . לכן $(BA)C = B(AC) \Rightarrow I_nC = BI_n \Rightarrow C = B$ . מ.ש.ל.

מהטענה נובע שאם $A \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$ הפיכה אז יש לה הפוכה אחת ויחידה. נסמן אותה כ- $A^{-1}$ . אז $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ . מהשוויון הזה נובע ש- $A$ הפוכה ל- $A^{-1}$ . ז"א אם $A$ הפיכה, אז גם $A^{-1}$ הפיכה ו $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ .

**פתרון של ממ"ל בצורה מטריציאלת.**

משפט 2. תהי $A\cdot X=B$ ממ"ל רשומה בצורה מטריציאלית. אם A מטריצה הפיכה מסדר $n$ אז לכל עמודה $B$ מסדר $n\times 1$ למערכת יש פתרון יחיד.

הוכחה. נציין קודם כל שמטריצה A היא ריבעוית מסדר $n$.

<u>קיום הפתרון.</u> נציב במקום $X$ את העמודה $A^{-1}B$. אז $A(A^{-1}B)=(AA^{-1})B=I_nB=B$. לכן $A^{-1}B$ הינו פתרון של הממ"ל $A\cdot X=B$.

<u>יחידות הפתרון.</u> נוכיח ש $A^{-1}B$ הינו פתרון יחיד של הממ"ל $A\cdot X=B$. לצורך זה נכפיל את שני הצדדים של המשוואה $A\cdot X=B$ ב- $A^{-1}$. נקבל $A^{-1}(A\cdot X)=A^{-1}B$. מכאן מקבלים

$$A^{-1}(A\cdot X)=A^{-1}B\Rightarrow(A^{-1}A)\cdot X=A^{-1}B\Rightarrow I_nX=A^{-1}B\Rightarrow X=A^{-1}B$$

מ.ש.ל.

הפתרון $X=A^{-1}B$ נקרא פתרון של הממ"ל בצורה מטריציאלית.

**תכונות של מטריצות הפיכות.**

טענה 3. אם $A,B$ שתי מטריצות הפיכות מסדר $n$. אז $AB$ הפיכה ו $\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

הוכחה. מכוון ש- $A,B$ הפיכות, קיימות $A^{-1},B^{-1}$ כך ש- $\begin{matrix}A^{-1}A=AA^{-1}=I_n,\\ B^{-1}B=B^{-1}B=I_n\end{matrix}$. מחוק אסוציאטיבי לכפל מטריצות נובע ש: $(AB)(B^{-1}A^{-1})=(A(BB^{-1}))A^{-1}=(AI_n)A^{-1}=AA^{-1}=I_n$. באופן דומה $(B^{-1}A^{-1})(AB)=I_n$. לכן $B^{-1}A^{-1}$ הפוכה ל- $AB$ ו $AB$ הפיכה. מ.ש.ל.

טענה 4. אם $A_1,A_2,...,A_m$ מטריצות הפיכות מסדר $n$ אז גם מכפלתן $A_1A_2\cdot..\cdot A_m$ הפיכה ו $\left(A_1A_2\cdot..\cdot A_m\right)^{-1}=A_m^{-1}\cdot..\cdot A_2^{-1}A_1^{-1}$.

הוכחה: אינדוקציה לפי מספר הגורמים $m$.

בסיס: $m=1$. אין מה לבדוק.

צעד האינדוקציה($m\geq 2$). נניח שהטענה נכונה עבור $m-1$ מטריצות. אז $A_1A_2\cdot..\cdot A_m=(A_1A_2\cdot..\cdot A_{m-1})\cdot A_m$. לפי הנחת האידוקציה המטריצה $A_1A_2\cdot..\cdot A_{m-1}$ הפיכה ו $\left(A_1A_2\cdot..\cdot A_{m-1}\right)^{-1}=A_{m-1}^{-1}\cdot..\cdot A_2^{-1}A_1^{-1}$. לכן, לפי הטענה הקודמת, גם המטריצה $(A_1A_2\cdot..\cdot A_{m-1})\cdot A_m$ הפיכה וההפוכה שלה שווה ל- $A_m^{-1}(A_1A_2\cdot..\cdot A_{m-1})^{-1}$. לכן

$$\left(A_1A_2\cdot..\cdot A_m\right)^{-1}=A_m^{-1}(A_{m-1}^{-1}\cdot..\cdot A_2^{-1}A_1^{-1})=A_m^{-1}\cdot..\cdot A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

מ.ש.ל.

הגדרה. מטריצה שמתקבלת ממטריצת היחידה ע"י פעולה אלמנטרית אחת נקראת מטריצה אלמנרית המתאימה לפעולה זאת.

דוגמאות.

א. אם פעולה אלמנטרית היא החלפת שורות $R_i \leftrightarrow R_j$ אז המטריצה האלמנטרית המתאימה תסומן כ- $E_{ij}$.

למשל $E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ב. אם פעולה אלמנטרית היא הכפלת שורה $R_i \leftarrow aR_i, a \neq 0$ אז המטריצה האלמנטרית המתאימה תסומן כ- $E_i(a)$. למשל $E_2(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ג. אם פעולה אלמנטרית היא הוספת שורה $R_i \leftarrow R_i + aR_j, i \neq j$ אז המטריצה האלמנטרית המתאימה תסומן כ- $E_j^i(a)$. למשל $E_3^1(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

משפט 5. תהי $A \in M_{n\times k}(\mathbf{R})$ מטריצה כלשהי. אם מטריצה $B$ מתקבלת מ- $A$ ע"י פעולת שורה אלמנטרית אחת, $e$ נאמר, אז $B = EA$, כאשר $E$ מטריצה אלמנטרית המתאימה לפעולה $e$.

לא נוכיח את המשפט, אך ניתן דוגמה אחת. נקח פעולה אלמנטרית $e = R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2$ ומטריצה

$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \end{pmatrix}$. אז

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \end{pmatrix} \xrightarrow[e=R_1 \leftarrow R_1+2R_2]{} B = \begin{pmatrix} A_{11}+2A_{21} & A_{12}+2A_{22} & A_{13}+2A_{23} & A_{14}+A_{24} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[e=R_1 \leftarrow R_1+2R_2]{} E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

קל לבדוק שבדוגמא הזאת השוויון $B = EA$ מתקיים.

טענה 6. כל מטריצה אלמנטרית הפיכה: ההפוכה למטריצה אלמנטרית היא מטריצה אלמנטרית של הפעולה ההפוכה. יותר מדויק:

1. $E_{ij}{}^{-1}=E_{ij}$ .
2. $\left(E_i(a)\right)^{-1}=E_i(a^{-1})$
3. $\left(E_j^i(a)\right)^{-1}=E_j^i(-a)$ .

הוכחה

1. נציב במשפט 5 $A=E_{ij}$ ו $e=R_i\leftrightarrow R_j$ . אז $B=I_n,E=E_{ij}$ ולפי משפט 5
$E_{ij}{}^{-1}=E_{ij}\Leftarrow I_n=E_{ij}\cdot E_{ij}$ .

2. נציב במשפט 5 $A=E_i(a)$ ו $e=R_i\leftarrow a^{-1}R_i$ . אז $B=I_n,E=E_i(a^{-1})$ ולפי משפט 5
$I_n=E_i(a^{-1})\cdot E_i(a)$ . נציב עכשיו $a^{-1}$ במקום $a$ בשוויון האחרון. נקבל $I_n=E_i(a)\cdot E_i(a^{-1})$ . יחד עם
$I_n=E_i(a^{-1})\cdot E_i(a)$ מקבלים ש- $E_i(a^{-1})=\left(E_i(a)\right)^{-1}$ .

3. נציב במשפט 5 $A=E_j^i(a)$ ו $e=R_i\leftarrow R_i-aR_j$ . אז $B=I_n,E=E_j^i(-a)$ ולפי משפט 5
$I_n=E_j^i(-a)\cdot E_j^i(a)$ . נציב עכשיו $-a$ במקום $a$ בשוויון האחרון. נקבל $I_n=E_j^i(a)\cdot E_j^i(-a)$ . יחד עם
$I_n=E_j^i(-a)\cdot E_j^i(a)$ מקבלים ש- $\left(E_j^i(a)\right)^{-1}=E_j^i(-a)$ .

מ.ש.ל.