הרצאה 5

משפט 1. אם מטריצה $A\in M_n(\mathbf{R})$ שקולת שורה למטריצת היחידה I_n אז היא הפיכה.

הוכחה

לפי ההנחה ישנה סידרת פעולות אלמנטריות $e_1,e_2,...,e_k$ שעל ידיהן ניתן להגיע מ- A ל I_n. ז"א

$$I_n=A_k\xleftarrow[e_k]{}A_{k-1}\xleftarrow{}...\xleftarrow{}A_3\xleftarrow[e_3]{}A_2\xleftarrow[e_2]{}A_1\xleftarrow[e_1]{}A_0=A$$

נסמן ע"י E_i את המטריצה האלמנטרית המתאימה לפעולה ה- e_i. לפי משפט 5 מהרצאה 4 $A_i=E_iA_{i-1}$ לכל i מ-1 עד k. אז

$$\left\{\begin{array}{c}A_1=E_1A\\A_2=E_2A_1\\A_3=E_3A_2\\ \cdot\\ \cdot\\A_k=E_kA_{k-1}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}A_1=E_1A\\A_2=E_2E_1A\\A_3=E_3E_2E_1A\\ \cdot\\ \cdot\\A_k=E_k\cdot...\cdot E_3E_2E_1A\end{array}\right.\Rightarrow I_n=E_k\cdot...\cdot E_3E_2E_1A.$$

נסמן $B:=E_k\cdot...\cdot E_3E_2E_1$. אז $I_n=BA$. נוכיח שמטריצה B הפוכה ל- A. לצורך זה צריך להראות ש- $I_n=AB$.

מטריצה B הפיכה כמכפלה של מטריצות הפיכות (טענה 4 מהרצאה 4). לכן קיימת B^{-1} כך ש- $B^{-1}B=BB^{-1}=I_n$. נכפיל שוויון $I_n=BA$ ב- B^{-1} משמאל: $B^{-1}I_n=B^{-1}BA\Rightarrow B^{-1}=A$. עכשיו $AB=B^{-1}B=I_n$. מ.ש.ל.

מהוכחת הטענה נובע ש- $A^{-1}=B=E_k\cdot...\cdot E_3E_2E_1$. לכן, לפי טענה 4 מהרצאה 4 $A^{-1}=\left(E_k\cdot...\cdot E_3E_2E_1\right)^{-1}=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}\cdot...\cdot E_k^{-1}$. לפי טענה 6 מהרצאה 4 כל אחת מהמטריצות E_i^{-1} אלמנטריות. מכאן נובעת המסקנה הבאה

מסקנה 2. כל מטריצה הפיכה ניתן לפרק למכפלה של מטריצות אלמנטריות.

מהוכחה של משפט 1 ניתן להוציא גם אלגוריתם לחישוב מטריצה הפוכה.

נדרג A לצורה מדורגות קנונית:

$$A_k\xleftarrow[e_k]{}A_{k-1}\xleftarrow{}...\xleftarrow{}A_3\xleftarrow[e_3]{}A_2\xleftarrow[e_2]{}A_1\xleftarrow[e_1]{}A_0=A$$

אם המטריצה A_k שונה מ- I_n עז A איננה הפיכה.

אם $A_k=I_n$ אז ההפוכה ל- A מתקבלת ממטריצת היחידה I_n ע"י ביצוע של אותן פעולות אלמנטריות באותו נסדר:

$$A^{-1}=E_kE_{k-1}...E_2E_1\xleftarrow[e_k]{}E_{k-1}...E_2E_1\xleftarrow{}...\xleftarrow[e_3]{}E_2E_1\xleftarrow[e_2]{}E_1\xleftarrow[e_1]{}E_0=I_n.$$

דוגמה. נהפוך את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&10\end{pmatrix}$. נפעיל את הפעולות האלמנטריות בו-זמנית גם על A וגם על I.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\4&5&6&0&1&0\\7&8&10&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[e_1:R_2\leftarrow R_2-4R_1]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-6&-4&1&0\\0&-6&-11&-7&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[e_2:R_3\leftarrow R_3-7R_1]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-6&-4&1&0\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow[e_3:R_2\leftarrow -\frac{1}{3}R_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&2&\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow[e_4:R_2\leftarrow R_2-2R_3]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&0&-\frac{2}{3}&3\frac{1}{3}&-2\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow[e_5:R_1\leftarrow R_1-3R_3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&-2&6&-3\\0&1&0&-\frac{2}{3}&3\frac{1}{3}&-2\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow[e_6:R_1\leftarrow R_1-2R_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&1\\0&1&0&-\frac{2}{3}&3\frac{1}{3}&-2\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&1\\-\frac{2}{3}&3\frac{1}{3}&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

טענה 3. תהי $A\in M_n(\mathbf{R})$ מטריצה כלשהי. אם לממ"ה $AX=O$ יש פתרון טריביאלי בלבד, אז A הפיכה.

הוכחה

נסמן כ- B את המטריצה הקנונית שמתקבלת מ- A לאחר הדירוג. מכוון שלמערכת יש פתרון יחיד דרגת המטריצה שווה למספר הנעלמים n. לכן בצורה מדורגת יש n שורות שונות מאפס. B מטריצה ריבועית לכן ב B אין שורות-אפס. מכאן נובע ש- $B=I_n$. לפי משפט 1 A הפיכה. מ.ש.ל.

טענה 4. אם מטריצות $A,B\in M_n(\mathbf{R})$ מקיימות $B\cdot A=I_n$ אז $A\cdot B=I_n$ ו B הפוכה ל- A.

הוכחה

נביט בממ"ה $AX=O$. נכפיל שני הצדדים ב- B משמאל. נקבל $B\cdot O=B\cdot(AX)\Leftarrow O=(BA)X\Leftarrow X=O$. לכן לממ"ה $AX=O$ יש פתרון טריביאלי בלבד ולפי טענה 3 מטריצה A הפיכה. ז"א קיימת $A^{-1}\in M_n(\mathbf{R})$ כך ש- $AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$. נכפיל את השוויון $B\cdot A=I_n$ ב- A^{-1} מימין: $(BA)A^{-1}=I_nA^{-1}\Leftarrow B(AA^{-1})=A^{-1}\Leftarrow B=A^{-1}\Leftarrow AB=AA^{-1}=I_n$. מ.ש.ל.

טענה 5. תהי $A\in M_n(\mathbf{R})$ מטריצה כלשהי. אם לממ"ל $AX=B$ יש פתרון לכל עמודה $B\in M_{n\times1}(\mathbf{R})$, אז המטריצה A הפיכה.

הוכחה

נסמן ע"י B^i את העמודה שבה הרכיב ה- i שווה ל- 1 ושאר הרכיבים שווה לאפס, כלומר,
$$B^i=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0\\ \cdot\\ 1\\ \cdot\\ 0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \text{המקום ה- } i\\ \\ \\ \end{array}.$$

נסמן פתרון המשוואה $AX=B^i$ כ- C^i, ז"א $AC^i=B^i$. נבנה מטריצה $C=(C^1\,C^2\ldots C^n)$. אז $AC=(AC^1\,AC^2\ldots AC^n)=(B^1\,B^2\ldots B^n)=I_n$. לפי טענה 4 מטריצה A הפיכה. מ.ש.ל.