הרצאה 6

הגדרה 1 (חזקות המטריצות).

אם $A \in M_n(\mathbf{R})$ ו $k \in \mathbf{Z}$ אז A^k מוגדר כ- $A^k := \begin{cases} \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{k}, k > 0 \\ I_n, k = 0 \\ \underbrace{A^{-1} \cdot \ldots \cdot A^{-1}}_{|k|}, k < 0 \end{cases}$. נציין שחזקה עם מעריך שלילי

מוגדרת רק במקרה שהמטריצה A הפיכה.

טענה 1. לכל שני מספרים שלמים $m,k \in \mathbf{Z}$ מתקיים:

א. $A^k A^m = A^{k+m}$.

ב. $\left(A^k\right)^m = A^{km}$.

הוכחה

חלק א'.

אם $k = 0$ אז

$$A^k A^m = A^0 A^m = I_n A^m = A^m = A^{0+m} = A^{k+m}.$$

אם $m = 0$ אז

$$A^k A^m = A^k A^0 = A^k I_n = A^k = A^{k+0} = A^{k+m}.$$

עכשיו נשארו 4 אפשרויות

$k > 0, m > 0$, $k < 0, m > 0$, $k > 0, m < 0$, $k < 0, m < 0$. אנו נבדוק את הטענה רק בשני המקרים הראשונים, כי שאר המקרים נבדקים באופן דומה.

1. $k > 0, m > 0$.

$$A^k A^m = (\underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{k}) \cdot (\underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{m}) = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{k+m} = A^{k+m}.$$

2. $k < 0, m > 0$.

$$A^k A^m = (\underbrace{A^{-1} \cdot \ldots \cdot A^{-1}}_{|k|}) \cdot (\underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{m}) = \begin{cases} (\underbrace{A^{-1} \cdot \ldots \cdot A^{-1}}_{|k|-m}), |k| > m \\ I_n, |k| = m \\ (\underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{m-|k|}), |k| < m \end{cases} = \begin{cases} (A^{-1})^{|k|-m}, |k| > m \\ A^{m-|k|}, |k| = m \\ A^{m-|k|}, k| < m \end{cases} = \begin{cases} A^{-k|+m|}, |k| > m \\ A^{m-|k|}, |k| = m \\ A^{m-|k|}, k| < m \end{cases} = A^{k+m}$$

חלק ב' ללא הוכחה.

מ.ש.ל.

נציין שלא כל התכונות של החזקות הרגילות (מספריות) מתקיימות גם לחזקות מטריציאליות.

למשל, השוויון $(AB)^k = A^k B^k$ לא מתקיים, מכוון שכפל מטריצות אינו קומוטטיבי.

הגדרה 2. שתי מטריצות $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ נקראות <u>מתחלפות</u> אם $AB = BA$.

טענה 2. אם $A,B\in M_n(\mathbf{R})$ מתחלפות אז לכל $k\in\mathbf{N}$ המטריצות A,B^k גם מתחלפות.

הוכחה

אינדוקציה לפי k. בדיקה: במקרה $k=1$ אנו מקבלים טאוטולוגיה $AB=BA \Leftarrow AB=BA$.

צעד האינדוקציה. נניח שהטענה נכונה עבור k, ז"א $AB^k=B^kA$. נוכיח ש- $AB^{k+1}=B^{k+1}A$:

$$AB^{k+1}=AB^kB \underset{AB^k=B^kA}{=} B^kAB \underset{AB=BA}{=} B^kBA=B^{k+1}A$$

מ.ש.ל.

טענה 3. אם $A,B\in M_n(\mathbf{R})$ מתחלפות אז לכל $k\in\mathbf{N}$ מתקיים $(AB)^k=A^kB^k$.

הוכחה

אינדוקציה לפי k. בדיקה: במקרה $k=1$ אנו מקבלים זהות $AB=AB$.

צעד האינדוקציה. נניח שהטענה נכונה עבור k, ז"א $(AB)^k=A^kB^k$. נוכיח ש- $(AB)^{k+1}=A^{k+1}B^{k+1}$:

$$(AB)^{k+1}=(AB)^kAB \underset{(AB)^k=A^kB^k}{=} A^kB^kAB \underset{\text{טענה 2}}{=} A^kAB^kB=A^{k+1}B^{k+1}$$

מ.ש.ל.

דטרמיננטות

הגדרה 3. הדטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר 1,2 מוגדרת כדלקמן:

אם $A=(a)\in M_1(\mathbf{R})$ אז $\det(A):=a$.

אם $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$ אז $\det(A):=ad-bc$.

טענה 4. מטריצה $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$ הפיכה אם ורק אם $\det(A)\neq 0$. במקרה שבו $\det(A)\neq 0$ המטריצה ההפוכה ל- A שווה ל- $A=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

הוכחה

נסמן $B:=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, $\Delta:=\det(A)=da-bc$. חישוב ישר מראה ש- $AB=\Delta\cdot I_2$. אם $\Delta\neq 0$ אז $AB=\Delta\cdot I_2 \Leftarrow \Delta^{-1}\cdot AB=I_2 \Leftarrow A(\Delta^{-1}B)=I_2 \Leftarrow A^{-1}=\Delta^{-1}B$. הוכחנו ש- A הפיכה כאשר $\Delta\neq 0$ ומצאנו ש- $A^{-1}=\Delta^{-1}B$.

נניח עכשיו ש- $\Delta=0$ ונוכיח ש A לא הפיכה. מהזהות $AB=\Delta I_2$ נובע ש $AB=0$. נניח, בדרך לשלילה, ש-A הפיכה. אז $AB=0 \Rightarrow A^{-1}AB=A^{-1}0 \Rightarrow B=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a=b=c=d=0$. לכן $A=0$. סתירה להפיכות של A. מ.ש.ל.

הגדרה 4. תהי $A\in M_n(\mathbf{R})$ מטריצה כלשהי. מטריציה ריבועית מסדר $n-1$ שמתקבלת מ- A ע"י מחיקת שורה ה- i ועמודה ה- j נקראת <u>מטריצה מינורית</u> של הרכיב (i,j) ומסומנת כ- $M_{ij}(A)$. הדטרמיננטה שלה נקראת <u>המינור</u> ה- (i,j) של A.

דוגמה. אם $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ אז $M_{11}(A)=\begin{pmatrix}5&6\\8&9\end{pmatrix}, M_{32}(A)=\begin{pmatrix}1&3\\4&6\end{pmatrix}$.

הגדרה 5. דטרמיננטה של מטריצה $A\in M_n(\mathbf{R})$ מוגדרת ע"י נוסחה רקורסיבית:

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}A_{1j}\det(M_{1j}(A)).$$

למשל, אם $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$ אז

$$\det(A)=A_{11}\det(M_{11}(A))-A_{12}\det(M_{12}(A))=ad-bc.$$

בהמשך נשתמש בשני סימונים לדטרמיננטה $|A|$ ו $\det(A)$.

משפט 5 (פיתוח דטרמיננטה לפי שורות ועמודות).
תהי $A\in M_n(\mathbf{R})$ מטריצה כלשהי. אז לכל $1\le i,j\le n$ מתקיים:

$|A|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}A_{ik}\,|M_{ik}(A)|$ (פיתוח הדטרמיננטה לפי שורה ה- i).

$|A|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}A_{kj}\,|M_{kj}(A)|$ (פיתוח הדטרמיננטה לפי שורה ה- j).

הוכחה: ללא הוכחה.

מהמשפט נובע שאם במטריצה יש שורת-אפס או עמודת-אפס אז הדטרמיננטה שלה שווה לאפס.

מסקנה 6. אם A מטריצה משולשת אז דטרמיננטה שלה שווה למכפלה של אברי האלכסון.
הוכחה
נוכיח את הטענה למטריציות משולשות עליונות בלבד. ההוכחה נעשה באינדוקציה לפי סדר המטריצה. הטענה טרביאלית אם A מטרציה מסדר 1. נניח שהטענה נכונה עבור כל מטריצה מסדר $n-1$. ניקח $A\in M_n(\mathbf{R})$ מטריצה משולשת עליונה: $A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}&\dots&A_{1n}\\0&A_{22}&A_{23}&\dots&A_{2n}\\0&0&A_{33}&\dots&A_{3n}\\.&.&.&\dots&.\\0&0&0&\dots&A_{nn}\end{pmatrix}$. נפתח $|A|$ לפי עמודה ראשונה. נקבל $|A|=A_{11}\,|M_{11}(A)|$. המטריצה מינורית $M_{11}(A)$ היא משולשת עליונה $M_{11}(A)=\begin{pmatrix}A_{22}&A_{23}&\dots&A_{nn}\\0&A_{33}&\dots&A_{3n}\\.&.&.&.\\0&0&\dots&A_{nn}\end{pmatrix}$ מסדר $n-1$. לכן $|M_{11}(A)|=A_{22}\cdot\ldots\cdot A_{nn}$ ו $|A|=A_{11}\,|M_{11}(A)|=A_{11}\cdot A_{22}\cdot\ldots\cdot A_{nn}$. מ.ש.ל.

טענה 7. לכל מטריצה $A\in M_n(\mathbf{R})$ מתקיים $|A|=|A^T|$.

הוכחה

אינדוקציה לפי n. בדיקה: אם $n=1$ אז $A=(A_{11})=A^T$. לכן $|A|=A_{11}=|A^T|$. נניח שהטענה נכונה עבור כל מטריצה מסדר $n-1$. ניקח מטריצה A כלשהי מסדר n. נפתח את הדטרמיננטנה $|A^T|$ לפי שורה ראשונה:

$$(*)\quad |A^T|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}(A^T)_{1k}\,|M_{1k}(A^T)|.$$

מהגדרה של מטריצה משוחלפת נובע ש $(A^T)_{1k}=A_{k1}, M_{1k}(A^T)=M_{k1}(A)^T$. לפי הנחת האינדוקציה $|M_{k1}(A)^T|=|M_{k1}(A)|$. לכן $|M_{1k}(A^T)|=|M_{k1}(A)^T|=|M_{k1}(A)|$. אחרי ההצבה לנוסחה (*) נקבל

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}(A^T)_{1k}\,|M_{1k}(A^T)|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}A_{k1}\,|M_{k1}(A)|.$$

ממשפט 5 נובע ש- $|A|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}A_{k1}\,|M_{k1}(A)|$ (פיתוח של |A| לפי העמודה הראשונה). מ.ש.ל.

טענה 8. אם במטריצה $A\in M_n(\mathbf{R}), n\ge 2$ יש 2 שורות/עמודות פרופורציונאליות אז $|A|=0$.

הוכחה: מטענה 7 נובע שמספיק להוכיח את הטענה רק עבור השורות. את זה נעשה באינדוקציה לפי n.

בדיקה: $n=2$. במקרה הזה $A=\begin{pmatrix} a & b\\ \alpha a & \alpha b\end{pmatrix}$ או $A=\begin{pmatrix} \alpha c & \alpha d\\ c & d\end{pmatrix}$. בשני המקרים הדטרמיננטה שווה לאפס.

צעד האינדוקציה. נניח שהטענה נכונה עבור כל מטריצה מסדר $n-1$ ($n\ge 3$). ניקח מטריצה $A\in M_n(\mathbf{R})$ שבה יש 2 שורות פרופורציונאליות: A_i ו A_j ($i\ne j$). נוכיח ש- $|A|=0$. נבחר אינדרס k השונה מ- i,j (זה ניתן לעשות כי $n\ge 3$) ונפתח את הדטרמיננטה $|A|$ לפי שורה ה- k: $|A|=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{k+s}A_{ks}\,|M_{ks}(A)|$.

מכוון ש- k שונה מ- i,j מטריצות מינוריות $M_{ks}(A)$ מכילות את השורות A_i ו A_j. לכן בכל אחת מהמטריצות $M_{ks}(A)$ יש שורות פרופורציונליות. לפי הנחת האינדוקציה $|M_{ks}(A)|=0$. מכאן נובע ש- $|A|=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{k+s}A_{ks}\,|M_{ks}(A)|=0$. מ.ש.ל.

הגדרה 6. תהי $A\in M_n(\mathbf{R})$ מטריצה כלשהי. מטריצה ריבועית A^* מסדר n שרכיביה מוגדרים ע"י הנוסחה $(A^*)_{ij}=(-1)^{i+j}\,|M_{ij}(A)|$ נקראתמטריצה <u>צמודה</u> ל- A.

דוגמה. אם $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$. אז
$$A^*=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}2&4\\3&9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&4\\1&9\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1&1\\3&9\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&1\\1&9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1&1\\2&4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1\\1&4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-5&1\\-6&8&-2\\2&-3&1\end{pmatrix}.$$

משפט 9. אם $A \in M_n(\mathbf{R})$ אז $A \cdot (A^*)^T = \det(A) \cdot I_n$.

כדי להוכיח את המשפט נוכיח קודם טענת עזר הבאה.

טענה 10. לכל $k \neq i$ מתקיים $\sum_{s=1}^{n} A_{is} \cdot (-1)^{k+s} |M_{ks}(A)| = 0$.

הוכחה.

נסמן כ- B את המטריצה שמתקבלת מ- A ע"י החלפת שורה ה- k בשורה ה- i שלה, ז"א $B_m = \begin{cases} A_m, m \neq k \\ A_i, m = k \end{cases}$

מטריצה B יש שתי שורות זהות (שורה ה- k ושורה ה- i). לכן $|B| = 0$ (לפי טענה 8). מצד שני פתיחת הדטרמיננטה $|B|$ לפי שורה ה- k נותנת את הביטוי הבא: $\sum_{s=1}^{n} (-1)^{k+s} B_{ks} \cdot |M_{ks}(B)|$. לכן $\sum_{s=1}^{n} (-1)^{k+s} B_{ks} \cdot |M_{ks}(B)| = 0$. מהגדרת מטריצה B נובע ש- $B_{ks} = A_{is}, M_{ks}(B) = M_{ks}(A)$. לכן הסכום $\sum_{s=1}^{n} (-1)^{k+s} B_{ks} \cdot |M_{ks}(B)|$ שווה לסכום $\sum_{s=1}^{n} (-1)^{k+s} A_{is} \cdot |M_{ks}(A)|$. מכאן נובע ש- $\sum_{s=1}^{n} (-1)^{k+s} A_{is} \cdot |M_{ks}(A)| = 0$. מ.ש.ל.

הוכחה של משפט 9.

נחשב את הרכיב ה- (i,k) של המכפלה $A \cdot (A^*)^T$:

$$\left(A \cdot (A^*)^T\right)_{ik} = \sum_{s=1}^{n} A_{is} ((A^*)^T)_{sk} = \sum_{s=1}^{n} A_{is} (A^*)_{ks} = \sum_{s=1}^{n} A_{is} (-1)^{k+s} |M_{ks}(A)|$$

לפי טענת עזר הסכום האחרון $\sum_{s=1}^{n} A_{is} (-1)^{k+s} |M_{ks}(A)|$ שווה לאפס כאשר $k \neq i$. אם $k = i$ אז הסכום $\sum_{s=1}^{n} A_{is} (-1)^{k+s} |M_{ks}(A)|$ הופך לפיתוח הדטרמיננטה לפי שורה ה- i ולכן שווה ל- $|A|$. קיבלנו $\left(A \cdot (A^*)^T\right)_{ik} = \begin{cases} |A|, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases} = (I_n)_{ik}$. מ.ש.ל.

מסקנה 11. אם $\det(A) \neq 0$ אז A הפיכה ו $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A^*)^T$.

הוכחה. לפי משפט 9 $A \cdot (A^*)^T = \det(A) \cdot I_n$. נחלק את שני הצדדים ב- $\det(A)$:

$\frac{1}{\det(A)} A \cdot (A^*)^T = I_n \Leftarrow A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} (A^*)^T \right) = I_n$. מטענה 4 של הרצאה 5 נובע ש- A הפיכה ו $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A^*)^T$. מ.ש.ל.