הרצאה 7

נוסחאות קרמר

משפט 1 (נוסחאות קרמר). תהי $AX=B$ ממ"ל אם מטריצה ריבועית A מסדר n ו $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \cdot \\x_n\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\ \cdot \\B_n\end{pmatrix}$

אם $|A|\neq 0$ אז המשתנה ה- i ניתן למצוא לפי הנוסחה $x_i=\dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ כאשר $\Delta=|A|$ ו- Δ_i היא דטרמיננטה שמתקבלת מ- Δ ע"י החלפת עמודה ה- i שלה בעמודה B.

הוכחה. ללא הוכחה.

דוגמה.

בממ"ל $\begin{cases}x+2y+3z=9\\4x+5y+6z=-4\\7x+8y+10z=5\end{cases}$ הדטרמיננטה $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&10\end{vmatrix}$ שונה מאפס ($\Delta=-3$). לכן ניתן להשתמש בנוסאות קרמר:

העמודה שהוחלפה

$x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$ כאשר $\Delta_1=\begin{vmatrix}9&2&3\\-4&5&6\\5&8&10\end{vmatrix}=-13$. מהשוויון $x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$ מקבלים $x=\dfrac{13}{3}=\dfrac{-13}{-3}$.

העמודה שהוחלפה

$y=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$ כאשר $\Delta_2=\begin{vmatrix}1&9&3\\4&-4&6\\7&5&10\end{vmatrix}=92$. מהשוויון $y=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$ מקבלים $y=\dfrac{92}{-3}=-\dfrac{92}{3}$.

העמודה שהוחלפה

$z=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}$ כאשר $\Delta_3=\begin{vmatrix}1&2&9\\4&5&-4\\7&8&5\end{vmatrix}=-66$. מהשוויון $z=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}$ מקבלים $z=\dfrac{-66}{-3}=22$.

חישוב דטרמיננטה ע"י פעולות אלמנטריות

בפרק זה נלמד איך פעולות אלמנטריות משפיעות על דטרמיננטה. לצורך זה נכתוב דטרמיננתה של מטריצה $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\ \cdot \\A_n\end{pmatrix}$ כ- $\det(A_1,A_2,\dots,A_n)$. למשל $\det((1,2,3),(4,5,6),(7,8,10))=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&10\end{vmatrix}=-3$.

טענה 2. אם מכפילים שורה אחת של מטריצה $A\in M_n(\mathbf{R})$ בסקלר $k\in\mathbf{R}$ כלשהו, אז גם הדטרמיננטה $|A|$ מוכפלת באותו הסקלר, ז"א $\det(A_1,...,A_{i-1},kA_i,A_{i+1},...,A_n)=k\det(A_1,...,A_{i-1},A_i,A_{i+1},...,A_n)$

הוכחה

נסמן כ- B מטריצה שמתקבלת מ- A ע"י הכפלת שורה ה- i שלה בסקלר k, ז"א $B_j=A_j$ אם $j\neq i$ ו $B_i=kA_i$. נפתח $|B|$ לפי שורה ה- i: $|B|=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{i+s}B_{is}\,|M_{is}(B)|$.

מהגדרת מטריצה B נובע ש- $B_{is}=kA_{is},M_{is}(B)=M_{is}(A)$. לכן הסכום $\sum_{s=1}^{n}(-1)^{i+s}B_{is}\,|M_{is}(B)|$ שווה לסכום $\sum_{s=1}^{n}(-1)^{i+s}kA_{is}\cdot|M_{is}(A)|\Leftarrow|B|=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{i+s}kA_{is}\cdot|M_{is}(A)|\Leftarrow|B|=k\,|A|$. מ.ש.ל.

טענה 3.

$$\det(A_1,...,A_{i-1},B,A_{i+1},...,A_n)+\det(A_1,...,A_{i-1},C,A_{i+1},...,A_n)=\det(A_1,...,A_{i-1},B+C,A_{i+1},...,A_n)$$

הוכחה. נסמן $Z=\begin{pmatrix}A_1\\ .\\ A_{i-1}\\ B+C\\ A_{i+1}\\ .\\ A_n\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}A_1\\ .\\ A_{i-1}\\ C\\ A_{i+1}\\ .\\ A_n\end{pmatrix},X=\begin{pmatrix}A_1\\ .\\ A_{i-1}\\ B\\ A_{i+1}\\ .\\ A_n\end{pmatrix}$. נפתח את הדטרמיננטה $|Z|$ לפי שורה ה- i:

$|Z|=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{i+s}Z_{is}\,|M_{is}(Z)|$. מהגדרת המטריצות X,Y,Z ניתן להסיק ש- $Z_i=B+C=X_i+Y_i$. לכן $Z_{is}=B_s+C_s=X_{is}+Y_{is}$. מכאן נובע ש

$$|Z|=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{i+s}Z_{is}\,|M_{is}(Z)|=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{i+s}(X+Y)_{is}\,|M_{is}(Z)|=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{i+s}X_{is}\,|M_{is}(Z)|+\sum_{s=1}^{n}(-1)^{i+s}Y_{is}\,|M_{is}(Z)|$$

מכוון שכל השורות של המטריצות X,Y,Z, חוץ משורה ה- i, שוות זו לזו אנו מקבלים $M_{is}(X)=M_{is}(Y)=M_{is}(Z)$. לכן

$$|Z|=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{i+s}X_{is}\,|M_{is}(Z)|+\sum_{s=1}^{n}(-1)^{i+s}Y_{is}\,|M_{is}(Z)|=$$
$$\sum_{s=1}^{n}(-1)^{i+s}X_{is}\,|M_{is}(X)|+\sum_{s=1}^{n}(-1)^{i+s}Y_{is}\,|M_{is}(Y)|=|X|+|Y|$$

מ.ש.ל.

מסקנה 4. פעולה אלמנטרית $R_i\leftarrow R_i+aR_j, i\neq j$ לא משנה את ערך הדטרמיננטה.

הוכחה

נניח לפשטות ש- $i=1,\ j=2$. נפעיל פעולה אלמנטרית $R_1 \leftarrow R_1 + aR_2$ על המטריצה $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ A_n \end{pmatrix}$. נקבל

מטריצה $B = \begin{pmatrix} A_1 + aA_2 \\ A_2 \\ \cdot \\ A_n \end{pmatrix}$. לפי טענה 3

$$\det(B) = \det(A_1 + aA_2, A_2, \ldots, A_n) = \underbrace{\det(A_1, A_2, \ldots, A_n)}_{\det(A)} + \underbrace{\det(aA_2, A_2, \ldots, A_n)}_{0} = \det(A).$$

מ.ש.ל.

מסקנה 5. פעולה אלמנטרית $R_i \leftrightarrow R_j, i \neq j$ משנה את סימן הדטרמיננטה.

הוכחה

נניח לפשטות ש- $i=1,\ j=2$. נביט במטריצה $B = \begin{pmatrix} A_1 + A_2 \\ A_1 + A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ A_n \end{pmatrix}$. במטריצה הזאת יש שתי שורות זהות, לכן

הדטרמיננטה שלה שווה לאפס. מצד שני לפי טענה 3

$$\det(B) = \det(A_1 + A_2, A_1 + A_2, A_3 \ldots, A_n) = \det(A_1, A_1 + A_2, A_3 \ldots, A_n) + \det(A_2, A_1 + A_2, A_3 \ldots, A_n).$$

נפעיל טענה 3 לכל אחד מהמחוברים בצד ימין של השוויון האחרון. נקבל

$$\det(B) = \det(A_1, A_1 + A_2, A_3 \ldots, A_n) + \det(A_2, A_1 + A_2, A_3 \ldots, A_n) =$$
$$\underbrace{\det(A_1, A_1, A_3 \ldots, A_n) + \det(A_1, A_2, A_3 \ldots, A_n)}_{\det(A_1, A_1 + A_2, A_3 \ldots, A_n)} + \underbrace{\det(A_2, A_2, A_3 \ldots, A_n) + \det(A_2, A_1, A_3 \ldots, A_n)}_{\det(A_2, A_1 + A_2, A_3 \ldots, A_n)} \cdot$$

מכאן נובע ש

$$0 = \det(B) = \underbrace{\det(A_1, A_1, A_3 \ldots, A_n)}_{0} + \det(A_1, A_2, A_3 \ldots, A_n) + \underbrace{\det(A_2, A_2, A_3 \ldots, A_n)}_{0} + \det(A_{21}, A_1, A_3 \ldots, A_n)$$

לכן

$\det(A_2, A_1, A_3 \ldots, A_n) = -\det(A_1, A_2, A_3 \ldots, A_n)$. מ.ש.ל.

הערה. מהשוויון $|A^T| = |A|$ (טענה 7 של הרצאה 6) נובע שבחישוב הדטרמיננטה ניתן להשתמש גם בפעולות אלמנטריות על עמודות המטריצה.

דוגמה

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{vmatrix}\begin{matrix}R_2\leftarrow R_2-R_1\\=\\R_3\leftarrow R_3-R_1\\R_4\leftarrow R_4-R_1\end{matrix}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&-2&-2\\0&-2&0&-2\\0&-2&-2&0\end{vmatrix}=(-2)^3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{vmatrix}\begin{matrix}R_2\leftrightarrow R_3\\=\end{matrix}-(-2)^3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&1&1&0\end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix}R_4\leftrightarrow R_4-R_2\\=\end{matrix}8\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{vmatrix}\begin{matrix}R_4\leftrightarrow R_4-R_3\\=\end{matrix}8\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=-16$$

משפט 6 (כפליות הדטרמיננטה).

אם A,B שתי מטריצות ריבעיות מסדר n אז $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$.

הוכחה: ללא הוכחה.

מסקנה 7. אם מטריצה $A\in M_n(\mathbf{R})$ הפיכה אז $|A|\neq 0$ ו $|A^{-1}|=|A|^{-1}$.

הוכחה

אם A הפיכה אז קיימת $A^{-1}\in M_n(\mathbf{R})$ כך ש- $AA^{-1}=I_n$. לכן $|AA^{-1}|=|I_n|=1$. לפי משפט 6 $|AA^{-1}|=|A|\cdot|A^{-1}|$ ובכן $|A|\cdot|A^{-1}|=1$. מכאן נובע ש- $|A|\neq 0$ ו $|A^{-1}|=|A|^{-1}$. מ.ש.ל.

יחד עם המסקנה 11 של הרצאה 6 אנו מקבלים ש- A הפיכה אם ורק אם $|A|\neq 0$.

דטרמיננטה של Vandermonde

הגדרה. יהיו $x_1,\dots,x_n$ משתנים ממשיים. הדטרמיננטה $\begin{vmatrix}1&x_1&x_1^2&\dots&x_1^{n-1}\\1&x_2&x_2^2&\dots&x_2^{n-1}\\1&x_3&x_3^2&\dots&x_3^{n-1}\\.&.&.&\dots&.\\1&x_n&x_n^2&\dots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}$ מסדר n נקראת דטרמיננטה של Vandermonde ומסומנת כ- $V(x_1,\dots,x_n)$. למשל

$$V(x_1,x_2)=\begin{vmatrix}1&x_1\\1&x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1,\quad V(x_1,x_2,x_3)=\begin{vmatrix}1&x_1&x_1^2\\1&x_2&x_2^2\\1&x_3&x_3^2\end{vmatrix},\quad V(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{vmatrix}1&x_1&x_1^2&x_1^3\\1&x_2&x_2^2&x_2^3\\1&x_3&x_3^2&x_3^3\\1&x_4&x_4^2&x_4^3\end{vmatrix}$$

וכו'. נחשב את הדטרמיננטות $V(x_1,x_2,x_3)$ ו $V(x_1,x_2,x_3,x_4)$. לצורך זה נשתמש בפעולות אלמנטריות על עמודות המטריצה.

חישוב של $V(x_1,x_2,x_3)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} \overset{C_3 \leftarrow C_3 - x_1C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 - x_2x_1 \\ 1 & x_3 & x_3^2 - x_3x \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftarrow C_2 - x_1C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2x_1 \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_3x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2x_1 \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_3x_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

חישוב של $V(x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} \overset{C_4 \leftarrow C_4 - x_1C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 - x_2^2x_1 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 - x_3^2x_1 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 - x_4^2x_1 \end{vmatrix} \overset{C_3 \leftarrow C_3 - x_1C_2}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 - x_2x_1 & x_2^3 - x_2^2x_1 \\ 1 & x_3 & x_3^2 - x_3x_1 & x_3^3 - x_3^2x_1 \\ 1 & x_4 & x_4^2 - x_4x_1 & x_4^3 - x_4^2x_1 \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftarrow C_2 - x_1C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2x_1 & x_2^3 - x_2^2x_1 \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_3x_1 & x_3^3 - x_3^2x_1 \\ 1 & x_4 - x_1 & x_4^2 - x_4x_1 & x_4^3 - x_4^2x_1 \end{vmatrix} =$$

$$.\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2x_1 & x_2^3 - x_2^2x_1 \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_3x_1 & x_3^3 - x_3^2x_1 \\ x_4 - x_1 & x_4^2 - x_4x_1 & x_4^3 - x_4^2x_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{vmatrix} =$$

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)V(x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

ע"י אינדוקציה לפי n ניתן להוכיח את הנוסחה הבאה:

$$.V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$