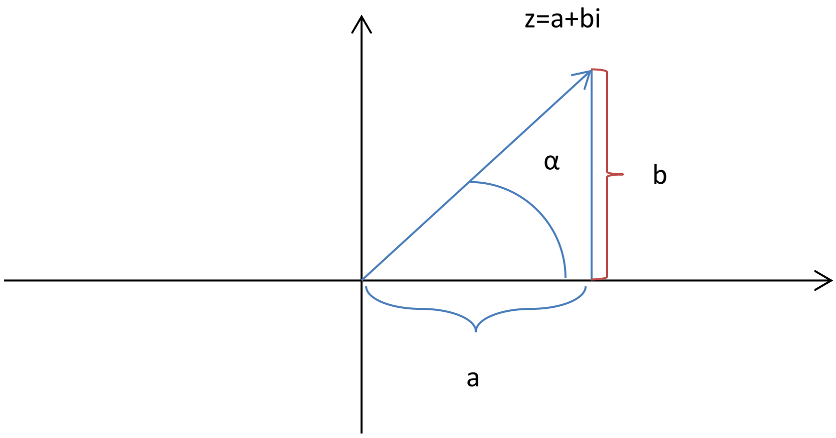
גאומטריה של מספרים מרוכבים

הגדרה 1. יהי $z=a+bi$ מספר מרוכב. הזווית בין ציר ה- x לבין הוקטור $z=a+bi=(a,b)$ (הזווית α בציור) נקראת ארגומנט של המספר ומסומנת כ- $Arg(z)$.



אורך היתר של המשולש שבתמונה שווה ל- $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. לכן

$\begin{cases} a=|z|\cos\alpha \\ b=|z|\sin\alpha \end{cases} \Leftarrow$ $z=|z|\cos\alpha+i|z|\sin\alpha$. נסמן $cis(\alpha)=\cos\alpha+i\sin\alpha$. אז $z=|z|cis(\alpha)$.

הצגה הזאת של מספר מרוכב z נקראת הצגה טריגונומטרית (פולרית, קוטבית) של המספר. את הארגומנט α ניתן למצוא לפי הנוסחה הבאה:

$$\operatorname{Arg}(a+bi)=\begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right), a>0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\pi, a<0 \\ \frac{\pi}{2}, a=0, b>0; \\ -\frac{\pi}{2}, a=0, b<0 \end{cases}.$$

למשל, $Arg(1)=0, Arg(-1)=\pi, Arg(i)=\pi/2, Arg(-i)=3\pi/2$.

מכוון שפונקציות $\sin(x),\cos(x)$ מחזוריות עם מחזור 2π הפונקציה $cis(x)$ גם מחזורית: $cis(x+2\pi)=cis(x)$.

טענה 1. שני מספרים מרוכבים $z_1=|z_1|cis(\alpha_1), z_2=|z_2|cis(\alpha_2)$ שווים אם רק אם

א. $|z_1|=|z_2|$ וגם

ב. $\alpha_1-\alpha_2=2\pi n$ עבור איזשהו $n\in\mathbf{Z}$