הרצאה 2

<u>הגדרה 1.</u> יהי F שדה כלשהו. קבוצה לא ריקה V (קבוצת הוקטורים) יחד עם שתי פעולות בינאריות חיבור $+$ בין הוקטורים וכפל $\cdot$ בין סקלר לבין וקטור נקראת <u>מרחב וקטורי</u> מעל השדה F כאשר מתקיימים את התנאים הבאים (אקסימות):

אקסיומות החיבור.
1A(סגירות כלפי חיבור). לכל $\bar{u},\bar{v}\in V$ הסכום $\bar{u}+\bar{v}$ גם שייך ל- V.

2A (חוק אסוציאטיבי). לכל $\bar{u},\bar{v},\bar{w}\in V$ מתקיים $(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w}=\bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})$.

3A (חוק קומוטטיבי). לכל $\bar{u},\bar{v}\in V$ מתקיים $\bar{u}+\bar{v}=\bar{v}+\bar{u}$.

4A (קיום וקטור האפס). קיים איבר $\bar{0}\in V$ כך שלכל $\bar{v}\in V$ מתקיים $\bar{v}+\bar{0}=\bar{v}$.

5A (קיום וקטור נגדי). לכל $\bar{v}\in V$ קיים איבר $-\bar{v}\in V$ כך ש- $\bar{v}+(-\bar{v})=\bar{0}$.

אקסיומות הכפל.
1M(סגירות כלפי כפל). לכל וקטור $\bar{v}\in V$ ולכל סקלר $a\in F$ המכפלב $a\cdot\bar{v}$ גם שייכת ל- V.

2M (חוק אסוציאטיבי). לכל $a,b\in F$ ולכל $\bar{v}\in V$ מתקיים $(a\cdot b)\cdot\bar{v}=a\cdot(b\cdot\bar{v})$.

3M (חוק היחידה). לכל $\bar{v}\in V$ מתקיים $1\cdot\bar{v}=\bar{v}$.

חוקים דיסטריבוטיבים (חוקי הפילוג).
1D. לכל $a,b\in F$ ולכל $\bar{v}\in V$ מתקיים $(a+b)\cdot\bar{v}=a\cdot\bar{v}+b\cdot\bar{v}$.

D2. לכל $a\in F$ ולכל $\bar{u},\bar{v}\in V$ מתקיים $a\cdot(\bar{u}+\bar{v})=a\cdot\bar{u}+a\cdot\bar{v}$.

דוגמאות בסיסיות.

דוגמא 0. קבוצה $V=\{\bar{0}\}$ עם הפעולות $\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}, a\cdot\bar{0}=\bar{0}$ מקיימת אקסיומות של מרחב וקטורי. המרחה הזה נקרא מרחב טריביאלי.

דוגמא 1. יהי F שדה כלשהו. לכל מספר טבעי n נקח $V=F^n=\{(f_1,...,f_n)\mid f_i\in F\}$ ונגדיר פעולות חיבור וכפל בסקלר באופן רגיל, ז"א

$$\left.\begin{array}{l}\bar{a}=(a_1,...,a_n)\\ \bar{b}=(b_1,...,b_n)\end{array}\right\}\Rightarrow \bar{a}+\bar{b}:=(a_1+b_1,...,a_n+b_n)$$

$$\bar{a}=(a_1,...,a_n), b\in F\Rightarrow b\cdot\bar{a}:=(ba_1,...,ba_n)$$

מהגדרת הפעולות ותכונות של השדה F נובעות אקסיומות 1A ו 1M. שאר האקסיומית נובעות מהאקסיומות המתאימות של שדה. המרחב הזה נקרא מרחב ה- n-יות.

דוגמא 2. יהי F שדה כלשהו. לכל זוג של מספרים טבעיים m,n קבוצת המטריצות

$M_{m\times n}(F)$ היא מרחב וקטורי ביחס לחיבור מטריצות וכפל בסקלר:

$$\left.\begin{array}{l} A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} \\ B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mn} \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow A+B:=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \dots & A_{1n}+B_{1n} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \dots & A_{2n}+B_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ A_{m1}+B_{m1} & A_{m2}+B_{m2} & \dots & A_{mn}+B_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}, b\in F \Rightarrow b\cdot A=\begin{pmatrix} bA_{11} & bA_{12} & \dots & bA_{1n} \\ bA_{21} & bA_{22} & \dots & bA_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ bA_{m1} & bA_{m2} & \dots & bA_{mn} \end{pmatrix}$$

כמו בדוגמה הקודמת ניתן לבדוק שקבוצת המטריצות $M_{m\times n}(F)$ היא מרחב וקטורי ביחס לפעולות חיבור וכפל בסקלר המוגדרות לעיל.

דוגמא 3. מרחב הפולינומים

<u>הגדרה 2.</u> הביטוי $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0$ נקרא <u>פולינום</u> (רב-איבר) של x מעל שדה F אם $a_i \in F$ לכל $i=0,..,n$. האיברים a_i נקראים <u>מקדמי הפולינום</u>. פולינום שכל מקדמיו שווים לאפס נקרא <u>פולינום-אפס</u> ויסומן כ-$0(x)$.
קבוצה של כל הפולינומים מעל F תסומן כ-$F[x]$.

אם $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ פולינום שונה מפולינום-אפס, אז <u>מעלה</u> $\deg(f(x))$ <u>של</u> $f(x)$ מוגדרת כ-$\max\{i \mid a_i \neq 0\}$. אם $f(x)$ פולינום-אפס, אז $\deg(f(x)) := -\infty$. בהמשך אנו מניחים ש-$-\infty + n = -\infty$ ו $-\infty < n$ לכל מספר שלם n.

<u>הגדרה 3.</u> שני פולינומים $f(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i x^i$ ו $g(x)=\sum_{i=0}^{m} g_i x^i$ שווים אם ורק אם הם מקיימים את התנאים הבאים:

א. $\deg(f(x)) = \deg(g(x))$.

ב. $g_i = f_i$ לכל $0 \le i \le \deg(f(x))$.

במילים אחרות שני פולינומים שווים אם ורק אם אחד מהם מתקבל מהשני ע"י הוספה של מספר כלשהו של איברים מהצורה $0x^i$, למשל
$x^2 + x^1 + 0x^0 = 0x^4 + 0x^3 + x^2 + x^1 + 0x^0$.

חיבור הפולינומים. יהיו $f(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i x^i \in F[x]$ ו $g(x)=\sum_{i=0}^{m} g_i x^i \in F[x]$ שני פולינומים כלשהם. בלי הגבלת הכלליות אפשר להניח ש-$m \le n$. <u>הסכום</u> $f(x)+g(x)$ מוגדר כפולינום $\sum_{i=0}^{m}(f_i+g_i)x^i+\sum_{i=m+1}^{n} f_i x^i$. מהגדרת הסכום נובע ש- $f(x)\in F[x], g(x)\in F[x] \Rightarrow f(x)+g(x)\in F[x]$, כלומר קבוצת הפולינומים $F[x]$ סגורה כלפי חיבור.

כפל פולינום בסקלר. לכל $f(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i x^i \in F[x]$ ו $a\in F$ נגדיר $af(x):=a\sum_{i=0}^{n} f_i x^i=\sum_{i=0}^{n} af_i x^i$.

משפט. קבוצת הפולינומים $F[x]$ היא מרחב וקטורי ביחס לפעולות חיבור וכפל בסקלר המוגדרות לעיל.
הוכחה. ללא הוכחה.