הרצאה 2

טענה 1. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. אזי

1. (חוק צמצום לכפל) לכל שלושה וקטורים $\bar{u},\bar{v},\bar{w}\in V$ מתקיים
$\bar{u}+\bar{v}=\bar{u}+\bar{w}\Rightarrow\bar{v}=\bar{w}$.
2. א. לכל $\bar{v}\in V$ מתקיים $0\cdot\bar{v}=\bar{0}$.
ב. לכל $a\in F$ מתקיים $a\cdot\bar{0}=\bar{0}$.
3. לכל $\bar{v}\in V$ מתקיים $(-1)\cdot\bar{v}=-\bar{v}$.
4. לכל $a\in F$ ולכל $\bar{v}\in V$ מתקיים
$a\cdot\bar{v}=\bar{0}\Leftrightarrow(a=0\vee\bar{v}=\bar{0})$.

הוכחה

1. מאקסיומה 5A של מ"ו נובע שקיים $-\bar{u}\in V$ כך ש $\bar{u}+(-\bar{u})=\bar{0}$. נוסיף את הוקטור $-\bar{u}$ לשני צדדים של השוויון $\bar{u}+\bar{v}=\bar{u}+\bar{w}$: $-\bar{u}+(\bar{u}+\bar{v})=-\bar{u}+(\bar{u}+\bar{w})$. מהחוק האסוציאטיבי נובע ש- $(-\bar{u}+\bar{u})+\bar{v}=(-\bar{u}+\bar{u})+\bar{w}$. מכאן אנו מקבלים $\bar{0}+\bar{v}=\bar{0}+\bar{w}\Leftarrow\bar{v}=\bar{w}$. מ.ש.ל.

2. נוכיח רק את חלק א'. החלק השני יש להוכיח בבית.
מטקסיומות של שדה נובע ש- $0+0=0$. אז $(0+0)\cdot\bar{v}=0\cdot\bar{v}$.
1D $\Leftarrow 0\cdot\bar{v}+0\cdot\bar{v}=0\cdot\bar{v}$.
4A $\Leftarrow 0\cdot\bar{v}+0\cdot\bar{v}=0\cdot\bar{v}+\bar{0}$.
חלק 1 $\Leftarrow 0\cdot\bar{v}=\bar{0}$.
מ.ש.ל.

3. מאקסיומות של שדה נובע ש- $1+(-1)=0$. לכן $(1+(-1))\cdot\bar{v}=0\cdot\bar{v}$.
חלק 2 $\Leftarrow ((-1)+1)\cdot\bar{v}=\bar{0}$,
1D $\Leftarrow (-1)\cdot\bar{v}+1\cdot\bar{v}=\bar{0}$,
3M $\Leftarrow (-1)\cdot\bar{v}+\bar{v}=\bar{0}$,
5A $\Leftarrow (-1)\cdot\bar{v}+\bar{v}=(-\bar{v})+\bar{v}$,
חלק א' $\Leftarrow (-1)\cdot\bar{v}=-\bar{v}$.
מ.ש.ל.

4. כוון אחד ($\Leftarrow$) נובע מחלק 2. נוכיח את הגרירה ההפוכה. נניח, בדרך לשלילה, שהגרירה לא נכונה. ז"א $a\cdot\bar{v}=\bar{0}\wedge a\neq0\vee\bar{v}\neq\bar{0}$. מאקסיומות של שדה נובע שקיים $a^{-1}\in F$ כך ש- $aa^{-1}=1$. אז $a^{-1}\cdot(a\cdot\bar{v})=a^{-1}\cdot\bar{0}$ ו
חלק 2 $\Leftarrow a^{-1}\cdot(a\cdot\bar{v})=\bar{0}$,
2M $\Leftarrow (a^{-1}\cdot a)\cdot\bar{v}=\bar{0}\Leftarrow 1\cdot\bar{v}=\bar{0}$,
3M $\Leftarrow \bar{v}=\bar{0}$. סתירה.
מ.ש.ל.

תת-מרחבים

הגדרה. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. תת-קבוצה $U\subseteq V$ נקראת תת-מרחב, סימון $U\leq V$, אם ורק אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

1. $\bar{0} \in U$.
2. U סגורה ביחס לחיבור. ז"א לכל $\bar{u},\bar{v} \in U$ הסכום $\bar{u}+\bar{v}$ גם שייך ל- U.
3. U סגורה ביחס לכפל בסקלר. ז"א לכל וקטור $\bar{u} \in U$ ולכל סכלר $a \in F$ המכפלה $a\bar{u}$ גם שייכת ל- U.

טענה 2. כל תת-מרחב U של המרחב V הינו מרחב ביחס לפעולות חיבור וכפל המוגדרות במרחב הכולל V.

הוכחה. אקסיומה 1A נובעת מסגירות של U ביחס לחיבור. אקסיומות 2A ו 3A מתקיימות ב- U כי הן מתקיימות במרחב הכולל V. האקסיומה 4A נובעת מהתנאי הראשון של הגדרת תת-מרחב. האקסיומה 5A נובעת מחלק 3 של טענה 1.

אקסיומה 1M נובעת מסגירות של תת-מרחב ביחס לכפל. אקסיומות 2M,3M, 1D ו 2D מתקיימות ב- U כי הן מתקיימות במרחב הכולל V.
מ.ש.ל.

דוגמאות.
1. תת-מרחב טריביאלי $\{\bar{0}\}$.

2. $V=\mathbf{R}^2, F=\mathbf{R}$, $U=\{(x,y) \mid x+y=0\}$.
   1. שייכות של וקטור-האפס. $(0,0) \in U$ כי $0+0=0$.
   2. סגירות כלפי חיבור.
   $$\bar{u}_1=(x_1,y_1),\bar{u}_2=(x_2,y_2)\in U \Rightarrow x_1+y_1=0, x_2+y_2=0.$$
   $$\bar{u}_1+\bar{u}_2=(x_1+x_2,y_1+y_2)\Rightarrow$$
   $$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)=0\Rightarrow.$$
   $$\bar{u}_1+\bar{u}_2\in U$$
   3. סגירות כלפי כפל בסקלר.
   $$a\in\mathbf{R},\bar{u}=(x,y)\in U \Rightarrow x+y=0.$$
   $$a\bar{u}=(ax,ay)\Rightarrow ax+ay=a(x+y)=0\Rightarrow a\bar{u}\in U.$$

3. דוגמא של תת-קבוצה שאינה תת-מרחב. $V=\mathbf{R}^2, F=\mathbf{R}$, $U=\{(x,y) \mid x\cdot y=0\}$.
   1. שייכות של וקטור-האפס. $(0,0) \in U$ כי $0\cdot 0=0$.
   2. אין סגירות כלפי חיבור, כי $\bar{u}_1=(1,0),\bar{u}_2=(0,1)\in U$, אבל $\bar{u}_1+\bar{u}_2=(1,1)\notin U$.

טענה 3. תהי $A\in M_{m\times n}(F)$ מטריצה כלשהי. אז הקבוצה $Ker(A):=\{\bar{v}\in F^n \mid A\bar{v}^T=0_{m\times 1}\}$ (זאת קבוצת הפתרונות של המערכת $AX=O$) היא תת-מרחב של F^n.
הוכחה.
שייכות של וקטור-האפס: $A\bar{0}^T=0_{m\times 1}\Rightarrow \bar{0}\in Ker(A)$.
סגירות כלפי חיבור:

$$\bar{u},\bar{v}\in Ker(A)\Rightarrow \begin{cases} A\bar{u}^T=0_{m\times 1} \\ A\bar{v}^T=0_{m\times 1}\end{cases} \Rightarrow A\bar{u}^T+A\bar{v}^T=0_{m\times 1}\Rightarrow A(\bar{u}+\bar{v})^T=0_{m\times 1}\Rightarrow \bar{u}+\bar{v}\in Ker(A)$$

סגירות כלפי כפל בסקלר:

$\begin{cases} \bar{u} \in Ker(A) \\ a \in F \end{cases} \Rightarrow A\bar{u}^T = 0_{m\times 1} \Rightarrow a(A\bar{u}^T) = 0_{m\times 1} \Rightarrow A(a\bar{u}^T) = 0_{m\times 1} \Rightarrow a\bar{u} \in Ker(A)$.

מ.ש.ל.

טענה 4. אם $U,W \le V$ אז $U \cap W \le V$.

הוכחה.

שייכות של אפס: $\begin{cases} \bar{0} \in U \\ \bar{0} \in W \end{cases} \Leftarrow \bar{0} \in U \cap W$.

סגירות ביחס לחיבור: $\bar{u},\bar{w} \in U \cap W \Leftarrow \begin{cases} \bar{u},\bar{w} \in U \\ \bar{u},\bar{w} \in W \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} \bar{u}+\bar{w} \in U \\ \bar{u}+\bar{w} \in W \end{cases} \Leftarrow \bar{u}+\bar{w} \in U \cap W$.

סגירות ביחס לכפל: $\bar{u} \in U \cap W, a \in F \Leftarrow \begin{cases} \bar{u}, \in U \\ \bar{u} \in W \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} a\bar{u} \in U \\ a\bar{u} \in W \end{cases} \Leftarrow a\bar{u} \in U \cap W$.

מ.ש.ל.

באופן דומה ניתן להוכיח שחיתוך של מספר כלשהו של תת-מרחבים גם תת-מרחב.

הגדרה (סכום של תת-מרחבים).

יהיו $U,W \le V$ שני תת-מרחבים. סכומם מוגדר כ- $U+W := \{\bar{u}+\bar{w} \mid \bar{u} \in U, \bar{w} \in W\}$.

טענה 5. אם $U,W \le V$ אז $U+W \le V$ ו $U,W \le U+W$.

הוכחה.

נוכיח קודם ש- $U+W \le V$.

שייכות של וקטור אפס: $\bar{0} \in U, \bar{0} \in W \Rightarrow \bar{0}+\bar{0} \in U+W \Rightarrow \bar{0} \in U+W$.

סגירות כלפי חיבור:

$$\begin{cases} \bar{x} \in U+W \\ \bar{y} \in U+W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists \bar{u}_1 \in U \ \exists \bar{w}_1 \in W \ \bar{x} = \bar{u}_1 + \bar{w}_1 \\ \exists \bar{u}_2 \in U \ \exists \bar{w}_2 \in W \ \bar{y} = \bar{u}_2 + \bar{w}_2 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}+\bar{y} = \bar{u}_1 + \bar{w}_1 + \bar{u}_2 + \bar{w}_2$$

$$\Rightarrow \bar{x}+\bar{y} = (\bar{u}_1+\bar{u}_2)+(\bar{w}_1+\bar{w}_2) \in U+W.$$

סגירות כלפי כפל בסקלר:

$$\begin{cases} \bar{x} \in U+W \\ a \in F \end{cases} \Rightarrow \exists \bar{u} \in U \ \exists \bar{w} \in W \ \bar{x} = \bar{u}+\bar{w} \Rightarrow a\bar{x} = a(\bar{u}+\bar{w}) =$$

$$a\bar{u}+a\bar{w} \in U+W$$

הוכחה של $U,W \le U+W$.

לכל $\bar{u} \in U$ מתקיים $\bar{u} = \bar{u}+\bar{0} \in U+W$. לכן $U \le U+W$. באופן דומה $W \le U+W$.

מ.ש.ל.