הרצאה 3

הגדרה (צירוף לינארי). ביטוי $a_1\bar{v}_1+...+a_n\bar{v}_n$ נקרא צירוף לינארי של וקטורים $\bar{v}_1,...,\bar{v}_n$. המקדמים $a_1,...,a_n$ נקראים מקדמי הצירוף. צירוף נקרא טריביאלי אם כל מקדמיו שווים לאפס. פרישה לינארית של וקטורים $\bar{v}_1,...,\bar{v}_n$ היא קבוצה של כל הצירופים הלינאריים $a_1\bar{v}_1+...+a_n\bar{v}_n$ כאשר המקדמים $a_1,...,a_n$ מקבלים את כל הערכים האפשריים בשדה F.
סימון לפרישה לינארית: $Sp(\bar{v}_1,...,\bar{v}_n)$.

אם $S=\{\bar{s}_1,...,\bar{s}_n\}\subseteq V$ קבוצה סופית (לא ריקה) של וקטורים אז $Sp(S)$ מוגדר כ- $Sp(\bar{s}_1,...,\bar{s}_n)$. פרישה לינארית של קבוצה ריקה מוגדרת כמרחב טריביאלי, ז"א $Sp(\varnothing)=\{\bar{0}\}$.

טענה 1. $Sp(\bar{v}_1,...,\bar{v}_n)\le V$.
הוכחה.
1) $\bar{0}=0\cdot\bar{v}_1+...+0\cdot\bar{v}_n\Rightarrow\bar{0}\in Sp(\bar{v}_1,...,\bar{v}_n)$.
2) סגירות ביחס לחיבור.
אם $\bar{x},\bar{y}\in Sp(\bar{v}_1,...,\bar{v}_n)$ אז קיימים סקלרים $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n\in F$ כך ש- $\bar{x}=a_1\bar{v}_1+...+a_n\bar{v}_n,\bar{y}=b_1\bar{v}_1+...+b_n\bar{v}_n$. אז

$$\begin{aligned}&\bar{x}+\bar{y}=(a_1\bar{v}_1+...+a_n\bar{v}_n)+(b_1\bar{v}_1+...+b_n\bar{v}_n)=\\&(a_1+b_1)\bar{v}_1+...+(a_n+b_n)\bar{v}_n\in Sp(\bar{v}_1,...,\bar{v}_n)\end{aligned}.$$

3) סגירותביחס לכפל בסקלר.
נקח $\bar{x}\in Sp(\bar{v}_1,...,\bar{v}_n)$ ו $a\in F$ כלשהם. קיימים סקלרים $a_1,...,a_n\in F$ כך ש- $\bar{x}=a_1\bar{v}_1+...+a_n\bar{v}_n$. אז

$$\begin{aligned}&a\bar{x}=a(a_1\bar{v}_1+...+a_n\bar{v}_n)=\\&(aa_1)\bar{v}_1+...+(aa_n)\bar{v}_n\in Sp(\bar{v}_1,...,\bar{v}_n)\end{aligned}.$$
מ.ש.ל.

הגדרה. תת-קבוצה $S\subseteq W$ של תת-מרחב W נקראת קבוצה פורשת אם $Sp(S)=W$. מרחב (תת-מרחב) נקרא מרחב נפרש סופית אם ישנה בו קבוצה סופית פורשת.

דוגמא. נתונה קבוצת וקטורים מהמרחב $\mathbf{R}^4$.
$\bar{v}_1=(1,2,-1,-2),\bar{v}_2=(1,2,3,-6),\bar{v}_3=(0,0,1,-1),\bar{v}=(1,2,1,-4)$.
צריך לבדוק האם $\bar{v}\in Sp(\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3)$. התשובה תהיה חיובית אם ורק אם למשוואה $x_1\bar{v}_1+x_2\bar{v}_2+x_3\bar{v}_3=\bar{v}$ יש פתרון (אחד לפחות).

$$x_1\bar{v}_1+x_2\bar{v}_2+x_3\bar{v}_3=\bar{v}\Leftrightarrow$$
$$(x_1,2x_1,-x_1,-2x_1)+(x_2,2x_2,3x_2,-6x_2)+(0,0,x_3,-x_3)=(1,2,1,-4)\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}x_1+x_2=1\\2x_1+2x_2=2\\-x_1+3x_2+x_3=1\\-2x_1-6x_2-x_3=-4\end{cases}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\2&2&0&2\\-1&3&1&1\\-2&-6&-1&-4\end{array}\right)=\left(\bar{v}_1^T\quad\bar{v}_2^T\quad\bar{v}_3^T\quad\middle|\bar{v}^T\right)$$

אחרי הדירוג מתקבלת מטריצה

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.25 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.25 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. מכאן נובע שלממ"ל יש אינסוף פתרונות ולכן $\bar{v} \in Sp(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.

<u>תכונות של פרישה לינארית.</u>

טענה. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. אזי לכל קבוצות סופיות $S,T \subseteq V$ מתקיים

1. $S \subseteq Sp(S)$.
2. אם $S \subseteq W \leq V$ אז $Sp(S) \leq W$.
3. $S \subseteq Sp(T) \Rightarrow Sp(S) \leq Sp(T)$.
4. $S \subseteq T \Rightarrow Sp(S) \subseteq Sp(T)$.
5. $\big(S \subseteq Sp(T) \wedge T \subseteq Sp(S)\big) \Leftrightarrow Sp(S) = Sp(T)$.

הוכחה.

1. אם $S = \varnothing$ אז $Sp(S) = \{\bar{0}\} \Leftarrow \varnothing \subseteq Sp(S)$. אם $S \neq \varnothing$ אז $S = \{\bar{s}_1, ..., \bar{s}_n\}$ ו

$$\begin{aligned} &\bar{s}_1 = 1 \cdot \bar{s}_1 + 0 \cdot \bar{s}_2 + ... + 0 \cdot \bar{s}_n \in Sp(S), \\ &\bar{s}_2 = 0 \cdot \bar{s}_1 + 1 \cdot \bar{s}_2 + ... + 0 \cdot \bar{s}_n \in Sp(S), \\ &... \\ &\bar{s}_n = 0 \cdot \bar{s}_1 + 0 \cdot \bar{s}_2 + ... + 1 \cdot \bar{s}_n \in Sp(S) \end{aligned}.$$

2. אם $S = \varnothing$ אז $Sp(S) = \{\bar{0}\} \leq W$. אם $S \neq \varnothing$ אז $S = \{\bar{s}_1, ..., \bar{s}_n\}$ וכל אחד מהוקטורים $\bar{s}_1, ..., \bar{s}_n$ שייך ל- W. מכוון ש- W תת-מרחב כל צירוף לינארי $a_1\bar{s}_1 + ... + a_n\bar{s}_n$ ($a_1, ..., a_n \in F$) גם שייך ל- W. לכן $Sp(S) \leq W$.

3. החלק הזה נובע מהסעיף הקודם כאשר נציב $Sp(T)$ במקום W.

4. מסעיף 1 נובע ש- $T \subseteq Sp(T) \Leftarrow S \subseteq Sp(T)$. עכשיו לפי סעיף 3 $Sp(S) \leq Sp(T)$.

5. אם $Sp(S) = Sp(T)$ אז $S \subseteq Sp(S) = Sp(T) \Leftarrow S \subseteq Sp(T)$. באופן סימטרי $T \subseteq Sp(S)$.

נניח עכשיו ש- $S \subseteq Sp(T) \wedge T \subseteq Sp(S)$. אז לפי סעיף 3 $Sp(S) \leq Sp(T) \wedge Sp(T) \leq Sp(S) \Leftarrow Sp(S) = Sp(T)$. מ.ש.ל.