הרצאה 4

<u>תלות ליניארית.</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. וקטורים $\bar{v}_1,...,\bar{v}_n$ נקראים <u>תלויים לינארית</u> (ת״ל) אם קיימים מקדמים $a_1,...,a_n \in F$ לא כולם שווים לאפס כך ש-

$a_1\bar{v}_1 + ... + a_n\bar{v}_n = \bar{0}$

וקטורים $\bar{v}_1,...,\bar{v}_n$ נקראים <u>בלתי תלויים לינארית</u> (בת״ל) אם שוויון $a_1\bar{v}_1 + ... + a_n\bar{v}_n = \bar{0}$ מתקיים אם ורק אם כל המקדמים $a_1,...,a_n$ שווים לאפס.

במילים אחרות, הוקטורים $\bar{v}_1,...,\bar{v}_n$ בת״ל אם ורק אם למשוואה $x_1\bar{v}_1 + ... + x_n\bar{v}_n = \bar{0}$ יש פתרון טריביאלי בלבד.

הערה: קבוצה ריקה נחשב כבלתי תלויה.

דוגמא. $\vec{v}_1 = (1,0,1), \vec{v}_2 = (1,1,0), \vec{v}_3 = (2,1,1)$.

הוקטורים האלה ת״ל כי $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_3$.

<u>תכונות.</u>

טענה 1. וקטור אחד תלוי לינארי אם ורק אם הוא וקטור-אפס.

הוכחה. אם $\bar{v}$ ת״ל אז קיים סקלר $a \in F$ שונה מאפס כך ש- $a\bar{v} = \bar{0}$. לפי טענה 1 מהרצאה 4 אנו מקבלים $a = 0 \vee \bar{v} = \bar{0}$. לכן $\bar{v} = \bar{0}$.

הגרירה $\bar{v} = \bar{0} \Leftarrow \bar{v}$ ת״ל הינה טריביאלית.

הגדרה 2. שני וקטורים $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ נקראים <u>פרופורציונאליים</u> אם אחד מהם מתקבל מהשני ע״י כפל בסקלר. למשל, הוקטורים $\bar{v}_1 = (1,2,3,4), \bar{v}_2 = (0.5,1,1.5,2)$ פרופורציונאליים כי $\bar{v}_1 = 2\bar{v}_2$.

טענה 2. וקטורים $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ ת״ל אם ורק אם הם פרופורציונאליים.

הוכחה.

אם $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ ת״ל אז ישנם סקלרים $a_1, a_2 \in F$ כך ש- $a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 = \bar{0}$ ו לפחות אחד מהמקדמים a_1, a_2 שונה מאפס. בהה״כ אפשר להניח ש- $a_1 \neq 0$. אז

$a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 = \bar{0} \Rightarrow \bar{v}_2 = -\dfrac{a_1}{a_2}\bar{v}_1$. לכן הוקטורים $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ פרופורציונאליים.

נניח עכשיו שהוקטורים $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ פרופורציונאליים ונוכיח שהם ת״ל. בהה״כ ניתן להניח $\bar{v}_2 = a\bar{v}_1$ עבור איזשהו סקלר $a \in F$. אז $-a\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{0}$ והוקטורים $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ ת״ל.

מ.ש.ל.

טענה 3. אם $S \subseteq T$ שתי קבוצות סופיות של וקטורים ו- S תלויה אז גם T תלויה.

(=אם $S \subseteq T$ שתי קבוצות סופיות של וקטורים ו- T בת״ל אז גם S בת״ל)

הוכחה

S ת״ל <= S לא ריקה. נמספר את אברי הקבוצה כ- $\bar{s}_1,...,\bar{s}_n$.

S ת״ל <= קיימים $a_1,...,a_n \in F$ לא כולם שווים לאפס כך ש- $a_1\bar{s}_1 + ... + a_n\bar{s}_n = \bar{0}$.

מכאן מקבלים ש- $a_1\bar{s}_1 + ... + a_n\bar{s}_n + 0 \cdot \bar{t}_{n+1} + ... + 0 \cdot \bar{t}_m = \bar{0}$. קבלנו צירוף לא טריביאלי

של קבוצה T ששווה לאפס. לכן הקבוצה T תלויה. מ.ש.ל.

מסקנה 4. אם בסידרת וקטורים יש וקטור-האפס או וקטורים פרופורציונאליים אז היא ת״ל.

טענה 5. תהי $\bar{v}_1,...,\bar{v}_n$ סידרת וקטורים שבה $\bar{v}_1 \neq \bar{0}$. אז התנאים הבאים שקוליים:

1) $\bar{v}_1,...,\bar{v}_n$ ת״ל.
2) קיים וקטור בסידרה $\bar{v}_i, i \geq 2$ שהוא צירוף לינארי של קודמיו (ז״א $\bar{v}_i \in Sp(\bar{v}_1,...,\bar{v}_{i-1})$)
3) קיים וקטור בסידרה $\bar{v}_i, i \geq 2$ שהוא צירוף לינארי של הוקטורים האחרים (ז״א $\bar{v}_i \in Sp(\bar{v}_1,...,\bar{v}_{i-1},\bar{v}_{i+1},...,\bar{v}_n)$).

הוכחה.

$1) \Rightarrow 2)$.

$\bar{v}_1,...,\bar{v}_n$ ת״ל, לכן קיימים סקלרים $a_1,...,a_n \in F$ לא כולם שווים לאפס כך ש-
$a_1\bar{v}_1 + ... + a_n\bar{v}_n = \bar{0}$. נסמן כ- i את האידקס המקסימלי שעבורו $a_i \neq 0$. אז
$a_1\bar{v}_1 + ... + a_i\bar{v}_i = \bar{0}$. אם $i = 1$ אז $a_1\bar{v}_1 = \bar{0} \Leftarrow (a_1 = 0 \vee \bar{v}_1 = \bar{0}) \Leftarrow \bar{v}_1 = \bar{0}$ בניגוד להנחה.
לכן $i > 1$ ו $a_i\bar{v}_i = -a_1\bar{v}_1 - ... - a_{i-1}\bar{v}_{i-1} \Leftarrow \bar{v}_i = -\frac{a_1}{a_i}\bar{v}_1 - ... - \frac{a_{i-1}}{a_i}\bar{v}_{i-1} \Leftarrow \bar{v}_i \in Sp(\bar{v}_1,...,\bar{v}_{i-1})$.

$2) \Rightarrow 3)$. מיידי.

$3) \Rightarrow 1)$.

אם $\bar{v}_i \in Sp(\bar{v}_1,...,\bar{v}_{i-1},\bar{v}_{i+1},...,\bar{v}_n)$ אז קיימים סקלרים $a_1,...,a_n \in F$ כך ש-
$\bar{v}_i = a_1\bar{v}_1 + ... + a_{i-1}\bar{v}_{i-1} + a_{i+1}\bar{v}_{i+1} + ... + a_n\bar{v}_n$. לכן
$\bar{0} = a_1\bar{v}_1 + ... + a_{i-1}\bar{v}_{i-1} + (-1)\bar{v}_i + a_{i+1}\bar{v}_{i+1} + ... + a_n\bar{v}_n$. מ.ש.ל.

מסקנה 6. אם $S \subseteq V$ קבוצה תלויה אז קיים $\bar{s} \in S$ כך ש-$\bar{s} \in Sp(S - \{\bar{s}\})$.

טענה 7. אם $S \subseteq V$ קבוצה תלויה אז קיים $\bar{s} \in S$ כך ש-$Sp(S) = Sp(S - \{\bar{s}\})$.

הוכחה

לפי מסקנה 6 קיים וקטור $\bar{s} \in S$ כך ש-$\bar{s} \in Sp(S - \{\bar{s}\})$. נוכיח ש-
$Sp(S - \{\bar{s}\}) = Sp(S)$. מההכלה $S - \{\bar{s}\} \subseteq S$ נובע ש-$Sp(S - \{\bar{s}\}) \leq Sp(S)$.
מההכלות $S - \{\bar{s}\} \subseteq Sp(S - \{\bar{s}\})$ ו $\bar{s} \in Sp(S - \{\bar{s}\})$ נובע ש-$S \subseteq Sp(S - \{\bar{s}\})$. לכן
$Sp(S) \leq Sp(S - \{\bar{s}\})$. יחד עם האי-שוויון $Sp(S - \{\bar{s}\}) \leq Sp(S)$ אנו מקבלים
$Sp(S - \{\bar{s}\}) = Sp(S)$. מ.ש.ל.

משפט 8. לכל קבוצה סופית $S \subseteq V$ קיימת תת-קבוצה $B \subseteq S$ כך ש:

1) B בת״ל.
2) $Sp(B) = Sp(S)$

הוכחה

נוכיח באינדוקציה לפי $|S|$.

בדיקה: אם $|S| = 0$ אז $S = \varnothing$ ואפשר לבחור $B = S$.

צעד האינדוקציה. נניח שהטענה נכונה עבור כל קבוצה בת n וקטורים ונוכיח את נכונותה עבור קבוצה S מגודל $n+1$.

אם S בת"ל אז נקח $B=S$.

אם S ת"ל אז לפי טענה 7 קיים $\bar{s}\in S$ כך ש-$Sp(S)=Sp(S-\{\bar{s}\})$. בקבוצה $S-\{\bar{s}\}$ יש n וקטורים ולכן ניתן להשתמש בהנחת האינדוקציה: קיימת תת-קבוצה $A\subseteq S-\{\bar{s}\}$ שהיא בת"ל ו $Sp(A)=Sp(S-\{\bar{s}\})$. עכשיו ניתן לבחור $B=A$. מ.ש.ל.