הרצאה 5

בסיס וממד

הגדרה 1. מרחב וקטורי V מעל שדה F נקרא <u>נפרש סופית</u> אם קיית בו קבוצה סופית פורשת, ז"א קיימת $S\subseteq V$ סופית כך ש- $Sp(S)=V$.

דוגמאות.

1. מרחב $V=F^n$ נפרש ע"י קבוצת הוקטורים
$E=\{\vec{e}_1=(1,0,...,0),\vec{e}_2=(0,1,...,0),...,\bar{e}_n=(0,0,...,1)\}$,
מכוון שכל וקטור $\bar{v}=(v_1,v_2,...,v_n)\in F^n$ ניתן להציג כצירוף לינארי של הוקטורים מ- E: $\bar{v}=(v_1,v_2,...,v_n)=\sum_{i=1}^{n}v_i\bar{e}_i$.

2. מרחב הפולינומים $F[x]$ לא נפרש סופית.
נניח, בדרך לשלילה, ש-$F[x]$ נפרש סופית, ז"א קיימים פולינומים $g_1(x),...,g_m(x)\in F[x]$ שפורשים את $F[x]$. נסמן $n=\max\{\deg(g_i(x))\,|\,i=1,...,m\}$.
אז x^{n+1} לא ניתן לקבל כצירוף לינארי של הפולינומים $g_1(x),...,g_m(x)$. סתירה.

הגדרה 2. קבוצה סופית של וקטורים $B\subseteq V$ נקראת <u>בסיס</u> של V אם ורק אם היא מקיימת שני תנאים הבאים:

1) B בת"ל.
2) $Sp(B)=V$.

ממשפט 8 של הרצאה 4 נובעת את המסקנה הבאה.

מסקנה 1. לכל מרחב נפרש סופית יש בסיס אחד לפחות.

דוגמאות.

1. הקבוצה $B=\varnothing$ היא בסיס של מרחב טריביאלי $V=\{\bar{0}\}$.
2. נבדוק שהקבוצה $E=\{\vec{e}_1=(1,0,...,0),\vec{e}_2=(0,1,...,0),...,\bar{e}_n=(0,0,...,1)\}$ היא בסיס של המרחב $V=F^n$. ראינו קודם ש- $Sp(E)=V$. נבדוק ש-E בת"ל. מהמשוואה $\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{e}_i=\bar{0}$ נובע ש- $(x_1,x_2,...,x_n)=(0,0,...,0)$, ז"א למשוואה $\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{e}_i=\bar{0}$ יש פתרון יחיד $\Leftarrow$ E קבוצה בת"ל.
הבסיס E נקרא הבסיס <u>הסטנדרטי</u> של המרחב F^n.
3. הבסיס הסטנדרטי של $M_{m\times n}(F)$: כמו בדוגמא הקודמת ניתן להראות שהמטריצות $E_{ij}=\begin{pmatrix}0&...&0&...&0\\...&...&...&...&...\\0&...&1&...&0\\...&...&...&...&...\\0&...&0&...&0\end{pmatrix}$ (1 נמצא בשורה ה- i ועמודה ה- j, שאר

רכיביה המטריצה שווים לאפס) מהוות בסיס של מרחב המטריצות $M_{m\times n}(F)$.

4. בסיס סטנדרטי של מרחב הפולינומים $F_n[x]=\{f(x)\in F[x]\,|\,\deg(f(x))\le n\}$:
$x^0,x^1,\dots,x^n$.

5. תהי $A\in M_{m\times n}(F)$ מטריצה כלשהי. קבוצת הפרתונות של מערכת משוואות הומוגניות $AX=O$ היא תת-מרחב של F^n שנקרא <u>מרחב הפתרונות</u> של המערכת או <u>גרעין</u> של המטריצה A (סימן $Ker(A)$). באופן פורמאלי:
$Ker(A)=\{\bar{v}\in F^n\,|\,A\bar{v}^T=O\}$.

נקח לדוגמא מטריצה ממשית $A=\begin{pmatrix}1&-2&0&1&3\\0&0&1&-1&1\end{pmatrix}$. אז

$$Ker(A)=\{\bar{v}\in \mathbf{R}^5\,|\,A\bar{v}^T=O\}=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\,\middle|\,\begin{cases}x_1-2x_2+x_4+3x_5=0\\ x_3-x_4+x_5=0\end{cases}\right\}.$$

הפתרון הכללי של הממ״ה שווה ל- $(2x_2-x_4-3x_5,x_2,x_4-x_5,x_4,x_5)$.
ניתן להציג אותו כצירוף לינארי:

$$(2x_2-x_4-3x_5,x_2,x_4-x_5,x_4,x_5)=(2x_2,x_2,0,0,0)+(-x_4,0,x_4,x_4,0)+(-3x_5,0,-x_5,0,x_5)=$$
$$x_2(2,1,0,0,0)+x_4(-1,0,1,1,0)+x_5(-3,0,-1,0,1)\in Sp\big((2,1,0,0,0),(-1,0,1,1,0),(-3,0,-1,0,1)\big)$$

מכאן נובע ש- $Ker(A)=Sp\big((2,1,0,0,0),(-1,0,1,1,0),(-3,0,-1,0,1)\big)$. נציין שכל אחד מהוקטורים $(2,1,0,0,0),(-1,0,1,1,0),(-3,0,-1,0,1)$ מתקבל מהפתרון הכללי ע״י הצבה של ערכים 1 ו 0 במקום המשתנים החופשים:

$$(2x_2-x_4-3x_5,x_2,x_4-x_5,x_4,x_5)\xrightarrow[x_2=1,x_4=0,x_5=0]{}(2,1,0,0,0);$$
$$(2x_2-x_4-3x_5,x_2,x_4-x_5,x_4,x_5)\xrightarrow[x_2=0,x_4=1,x_5=0]{}(-1,0,1,1,0);$$
$$(2x_2-x_4-3x_5,x_2,x_4-x_5,x_4,x_5)\xrightarrow[x_2=0,x_4=0,x_5=1]{}(-3,0,-1,0,1)$$

קל לבדוק שהוקטורים האלה בלתי תלוים לינארית ולכן מהווים בסיס של מרחב הפתרונות. הבסיס הזה נקרא <u>הבסיס הסטנרטי</u> של מרחב הפתרונות.

טענה 2. תהי S קבוצה סופית כלשהי. אם $T\subseteq Sp(S)$ ו $|T|>|S|$ אז T קבוצה תלויה לינארית.
הוכחה
אם S קבוצה ריקה אז $T=\{\bar{0}\}$ והטענה נכונה.
נניח עכשיו ש- $|S|=m>0$. אז $S=\{\bar{s}_1,\dots,\bar{s}_m\}$ ו $T=\{\bar{t}_1,\dots,\bar{t}_n\}$, $n>m$. מההכלה $T\subseteq Sp(S)$ נובע שקיימים סקלרים $a_{ij}\in F$ כך ש- $\bar{t}_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\bar{s}_i$. נביט במטריצה

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n-1}&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n-1}&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn-1}&a_{mn}\end{pmatrix}$. מכוון שמספר שורות ב-$A$ קטן ממספר העמודות,
לממ״ה $AX=O$ יש פתרון לא טריביאלי: $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$. כלומר

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn-1} & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = 0$$ לכל $i=1,...,m$. עכשיו

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j \bar{t}_j = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\bar{s}_i\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_j a_{ij}\bar{s}_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j a_{ij}\bar{s}_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j a_{ij}\right)\bar{s}_i = \sum_{i=1}^{m}0\cdot\bar{s}_i = \bar{0}.$$

מ.ש.ל.

מסקנה 3. תהי S קבוצה סופית כלשהי. אם $T \subseteq Sp(S)$ קבוצה בת״ל אז ו $|T| \le |S|$

מסקנה 4. אם A,B שני בסיסים של אותו מרחב אז $|A|=|B|$.

הוכחה

ממסקנה 3 וההכלה $A \subseteq V = Sp(B)$ נובע $|A| \le |B|$. באופן סימטרי $|B| \le |A|$. מ.ש.ל.

הגדרה 3. מספר וקטורים בבסיס B של מרחב V נקרא <u>מימד המרחב</u> (סימן $\dim(V)$). ממסקנה 4 נובע שמימד המרחב לא תלוי בבחירת הבסיס.

דוגמאות.

1. $\dim(\{\bar{0}\}) = 0$.
2. $\dim(F^n) = n$.
3. $\dim(M_{m\times n}(F)) = mn$.
4. אם $A \in M_{m\times n}(F)$ אז $\dim(Ker(A))$ שווה למספר משתנים חופשיים בפרתון הכללי של ממ״ה $AX = O$.
5. $\dim(F_n[x]) = n+1$.

טענה 5. אם $\bar{v}_n \notin Sp(\bar{v}_1,...,\bar{v}_{n-1})$ (במקרה של $n=1$ $\bar{v}_1 \ne \bar{0}$) אז $\bar{v}_1,...,\bar{v}_{n-1},\bar{v}_n$ ת״ל אם ורק אם $\bar{v}_1,...,\bar{v}_{n-1}$ ת״ל.

הוכחה

אם $\bar{v}_1,...,\bar{v}_{n-1}$ ת״ל אז גם $\bar{v}_1,...,\bar{v}_{n-1},\bar{v}_n$ ת״ל (טענה 3 מההרצאה 4).

נניח עכשיו ש- $\bar{v}_1,...,\bar{v}_{n-1},\bar{v}_n$ ת״ל. אז קיימים סקלרים $a_1,...,a_n \in F$ (לא כולם שווים לאפס) כך ש- $a_1\bar{v}_1 + ... + a_{n-1}\bar{v}_{n-1} + a_n\bar{v}_n = \bar{0}$.

אם $a_n = 0$ אז $a_1\bar{v}_1 + ... + a_{n-1}\bar{v}_{n-1} = \bar{0}$ ולכן הוקטורים $\bar{v}_1,...,\bar{v}_{n-1}$ ת״ל.

נוכיח שהמקרה $a_n \ne 0$ בלתי-אפשרי. נניח, בדרך לשלילה, ש- $a_n \ne 0$. אם $n=1$ אז $a_1\bar{v}_1 = \bar{0} \Rightarrow \bar{v}_1 = \bar{0}$ בניגוד להנחה $\bar{v}_1 \ne \bar{0}$. לכן המקרה $n=1$ בלתי-אפשרי וניתן להניח ש- $n>1$. אז

$$a_1\bar{v}_1 + ... + a_{n-1}\bar{v}_{n-1} + a_n\bar{v}_n = \bar{0} \Rightarrow \bar{v}_n = -\frac{a_1}{a_n}\bar{v}_1 - ... - \frac{a_{n-1}}{a_n}\bar{v}_{n-1} \Rightarrow \bar{v}_n \in Sp(\bar{v}_1,...,\bar{v}_{n-1}).$$

סתירה להנחה $\bar{v}_n \notin Sp(\bar{v}_1,...,\bar{v}_{n-1})$. מ.ש.ל.

טענה 6. יהי V מרחב וקטורי ממימד n. אז לכל תת-קבוצה $S \subseteq V$ בת n איברים התנאים הבאים שקולים

א. S בת״ל.
ב. $Sp(S)=V$.
הוכחה
א⇐ב.
נניח, בדרך לשלילה, ש- $Sp(S)\neq V$. ניקח וקטור כלשהו $\bar{v}\in V-Sp(S)$. אז $\bar{v}\notin Sp(S)$ ולפי טענה 5 הקבוצה $S\cup\{\bar{v}\}$ בת״ל. מצד שני המרחב V נפרש ע״י n וקטורים. לכן כל תת-קבוצה בת $n+1$ וקטורים ת״ל. מכאן נובע שהקבוצה $S\cup\{\bar{v}\}$ ת״ל. סתירה. לכן $Sp(S)=V$.
ב⇐א.
לפי משפט 8 מהרצאה 4 קיימת תת-קבוצה בלתי תלויה $B\subseteq S$ שעבורה $Sp(S)=Sp(B)$. יחד עם $Sp(S)=V$ אנו מקבלים ש- B בסיס של V. לפי מסקנה 4 $|S|=n=\dim(V)=|B|$. לכן $|S|=|B|$ ⇐ $B=S$. מ.ש.ל.