הרצאה 6

מימד של תת-מרחבים

טענה 1. יהי V מרחב וקטורי נפרש סופית מעל שדה F. אז כל תת-מרחב W שלו נפרש סופית.
הוכחה
נסמן $n := \dim(V)$. המקרה $W = \{\bar{0}\}$ הינו טריביאלי, לכן נניח ש- $W \neq \{\bar{0}\}$. נניח, בדרך לשלילה, נניח ש- W לא נפרש סופית, ז"א
(*) $Sp(S) \neq W$ לכל קבוצה סופית $S \subseteq W$.
נבחר וקטור כלשהו $\bar{w}_1 \in W$ השונה מאפס ונבנה סידרת וקטורים $\bar{w}_k$ באופן רקורסיבי: $\bar{w}_{k+1}$ הוא וקטור כלשהו השייך ל- $W - Sp(\bar{w}_1,...,\bar{w}_k)$ (מהתנאי (*) נובע שהקבוצה $W - Sp(\bar{w}_1,...,\bar{w}_k)$ לא ריקה ולכן ניתן לבחור וקטור $\bar{w}_{k+1} \in W - Sp(\bar{w}_1,...,\bar{w}_k)$). לפי הבנייה כל וקטור שבסידרה שייך ל- W.
נוכיח באינדוקציה שלכל $k \in \mathbf{N}$ הסידרה $\bar{w}_1,...,\bar{w}_k$ בת"ל.
בדיקה: הטענה נכונה עבור $k=1$, כי $\bar{w}_1 \neq \bar{0}$.
צעד האינקציה: אם $\bar{w}_1,...,\bar{w}_k$ בת"ל, אז אי-תלות של הסידרה $\bar{w}_1,...,\bar{w}_k,\bar{w}_{k+1}$ נובעת מ- $\bar{w}_{k+1} \notin Sp(\bar{w}_1,...,\bar{w}_k)$ וטענה 5, הרצאה 5.
לכן הסידרה $\bar{w}_1,...,\bar{w}_k$ בלתי תלויה לכל k טבעי. לכן הסידרה $\bar{w}_1,...,\bar{w}_{n+1}$ גם בלתי תלויה. קבלנו שבמרחב V, הנפרש ע"י n וקטורים, מכיל סידרה בלתי תלויה של $n+1$ וקטורים: $\bar{w}_1,...,\bar{w}_{n+1}$. אבל זה סותר מסקנה 3 מהרצאה 5. לכן ההנחה (*) אינה נכונה. מ.ש.ל.

מהטענה הזאת נובע שלכל תת-מרחב של מרחב נפרש סופית יש בסיס (מסקנה 1 של הרצאה 5).

טענה 2. יהי V מרחב וקטורי נפרש סופית. אז
1) $W \leq V \Rightarrow \dim(W) \leq \dim(V)$.
2) $W \leq V \wedge \dim(W) = \dim(V) \Rightarrow W = V$.
הוכחה
1) ניקח בסיסים A,B של V,W בהתאם. אז B קבוצה בת"ל חלקית ל- $V = Sp(A)$.
אז לפי מסקנה 3 מהרצאה 5 $|B| \leq |A| \Leftarrow \dim(W) \leq \dim(V)$.
2) ניקח בסיס B כלשהו של W. אז $|B| = \dim(W) \Leftarrow |B| = \dim(V)$. מכוון ש- B בת"ל ו $|B| = \dim(V)$, B גם פורשת את V (טענה 6 מהרצאה 5). מצד שני B פורשת את W, כי B בסיס של W. לכן $W = Sp(B) = V$. מ.ש.ל.

טענה 3 (השלמת בסיס).
יהי V מרחב וקטורי נפרש סופית ו $W \leq V$ תת-מרחב כלשהו.
לכל בסיס B של W קיים בסיס A של V כך ש- $B \subseteq A$.
הוכחה.
אינדוקציה לפי $\dim(V) - \dim(W)$.
בדיקה: במקרה $\dim(V) - \dim(W) = 0$ אנו מקבלים $V = W$ (טענה 2) ולכן ניתן לקחת

$A = B$.

נניח שהטענה נכונה עבור $\dim(V)-\dim(W)=k$ ונוכיח את נכונותה במקרה $\dim(V)-\dim(W)=k+1$. נסמן $n:=\dim(V), m:=\dim(W)$. אז $n-m=k+1\geq 1$. ניקח בסיס B כלשהו של W ($|B|=\dim(W)=m$). מכוון ש- $W<V$ הקבוצה $V-W$ לא ריקה. ניקח וקטור $\bar{v}\in V-W$ כלשהו. מטענה 3, הרצאה 5 נובע שהקבוצה $B\cup\{\bar{v}\}$ בת"ל. לכן $\dim(Sp(B\cup\{\bar{v}\}))=|B|+1=m+1$ ו $\dim(V)-\dim(Sp(B\cup\{\bar{v}\}))=n-(m+1)=k$. לפי הנחת אינדוקציה ניתן להרחיב בסיס $B\cup\{\bar{v}\}$ של תת-מרחב $Sp(B\cup\{\bar{v}\})$ עד בסיס של כל המרחב. מ.ש.ל.

משפט 4. יהי V מרחב וקטורי נפרש סופית. אז לכל שני תת-מרחבים $W,U\leq V$ מתקיים

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W).$$

הוכחה.

נסמן $n:=\dim(U), m:=\dim(W), k:=\dim(U\cap W)$. נבחר בסיס $\bar{b}_1,...,\bar{b}_k$ של $U\cap W$.

לפי טענה 4 ניתן להשלים את הבסיס עד בסיסים של U ו W:

$\bar{b}_1,...,\bar{b}_k,\bar{b}_{k+1},...,\bar{b}_n$ - בסיס של U,

$\bar{b}_1,...,\bar{b}_k,\bar{a}_{k+1},...,\bar{a}_m$ - בסיס של W.

נוכיח שהוקטורים $\bar{b}_1,...,\bar{b}_k,\bar{b}_{k+1},...,\bar{b}_n,,\bar{a}_{k+1},...,\bar{a}_m$ מהווים בסיס של הסכום $U+W$.

<u>א. $Sp(\bar{b}_1,...,\bar{b}_k,\bar{b}_{k+1},...,\bar{b}_n,,\bar{a}_{k+1},...,\bar{a}_m)=U+W$.</u>

ההכלה $Sp(\bar{b}_1,...,\bar{b}_k,\bar{b}_{k+1},...,\bar{b}_n,,\bar{a}_{k+1},...,\bar{a}_m)\subseteq U+W$ נובעת מ-

$\{\bar{b}_1,...,\bar{b}_k,\bar{b}_{k+1},...,\bar{b}_n\}\subseteq U\subseteq U+W$ ו $\{\bar{b}_1,...,\bar{b}_k,\bar{a}_{k+1},...,\bar{a}_m\}\subseteq W\subseteq U+W$.

נוכיח עכשיו ש- $U+W\subseteq Sp(\bar{b}_1,...,\bar{b}_k,\bar{b}_{k+1},...,\bar{b}_n,,\bar{a}_{k+1},...,\bar{a}_m)$. ניקח $\bar{x}\in U+W$ כלשהו.

אז קיימים $\bar{u}\in U,\bar{w}\in W$ כך ש- $\bar{x}=\bar{u}+\bar{w}$.

$\bar{u}\in U=Sp(\bar{b}_1,...,\bar{b}_k,\bar{b}_{k+1},...,\bar{b}_n)\Leftarrow \bar{u}=\alpha_1\bar{b}_1+...+\alpha_k\bar{b}_k+\alpha_{k+1}\bar{b}_{k+1}+...+\alpha_n\bar{b}_n$,

$\bar{w}\in W=Sp(\bar{b}_1,...,\bar{b}_k,\bar{a}_{k+1},...,\bar{a}_m)\Leftarrow \bar{w}=\beta_1\bar{b}_1+...+\beta_k\bar{b}_k+\beta_{k+1}\bar{a}_{k+1}+...+\beta_m\bar{a}_m$.

מכאן נובע ש

$$\bar{x}=(\beta_1+\alpha_1)\bar{b}_1+...+(\beta_k+\alpha_k)\bar{b}_k+\beta_{k+1}\bar{a}_{k+1}+...+\beta_m\bar{a}_m+\alpha_{k+1}\bar{b}_{k+1}+...+\alpha_n\bar{b}_n$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{x}\in Sp(\bar{b}_1,...,\bar{b}_k,\bar{b}_{k+1},...,\bar{b}_n,,\bar{a}_{k+1},...,\bar{a}_m)$$

חלק א' הוכח.

<u>ב. הוקטורים $\bar{b}_1,...,\bar{b}_k,\bar{b}_{k+1},...,\bar{b}_n,,\bar{a}_{k+1},...,\bar{a}_m$ בת"ל.</u>

נביט במשוואה

(**) $x_1\bar{b}_1+...+x_k\bar{b}_k+x_{k+1}\bar{b}_{k+1}+...+x_n\bar{b}_n+y_{k+1}\bar{a}_{k+1}+...+y_m\bar{a}_m=\bar{0}$.

נסמן $\bar{v}:=y_{k+1}\bar{a}_{k+1}+...+y_m\bar{a}_m$. אז $\bar{v}\in Sp(\bar{a}_{k+1},...,\bar{a}_m)\leq W$. מצד שני

$\bar{v}=-(x_1\bar{b}_1+...+x_k\bar{b}_k+x_{k+1}\bar{b}_{k+1}+...+x_n\bar{b}_n)\in Sp(\bar{b}_1,...,\bar{b}_k,\bar{b}_{k+1},...,\bar{b}_n)=U$.

לכן $\bar{v}\in U\cap W=Sp(\bar{b}_1,...,\bar{b}_k)$ מאחר ש $\bar{b}_1,...,\bar{b}_k$ בסיס של החיתוך קיימים סקלרים $y_1,...,y_k\in F$ כך ש- $\bar{v}=y_1\bar{b}_1+...+y_k\bar{b}_k$. אז $y_1\bar{b}_1+...+y_k\bar{b}_k-y_{k+1}\bar{a}_{k+1}-...-y_m\bar{a}_m=\bar{0}$.

הוקטורים $\bar{b}_1,...,\bar{b}_k,\bar{a}_{k+1},...,\bar{a}_m$ בת"ל, לכן $y_1=0,...,y_k=0,y_{k+1}=0,...,y_m=0$ ו

מ-(**) נובע ש- $\vec{v} = y_{k+1}\overline{a}_{k+1} + ... + y_m\overline{a}_m = \overline{0}$. $x_1\overline{b}_1 + ... + x_k\overline{b}_k + x_{k+1}\overline{b}_{k+1} + ... + x_n\overline{b}_n = \overline{0}$.
הוקטורים $\overline{b}_1,...,\overline{b}_k,\overline{b}_{k+1},...,\overline{b}_n$ בת״ל, לכן $x_1 = 0,..., x_k = 0, x_{k+1} = 0,..., x_n = 0$.
הוכחנו שלמשוואה (**) יש פתרון טריביאלי בלבד. חלק ב׳ הוכח.

הוכחנו שהוקטורים $\overline{b}_1,...,\overline{b}_k,\overline{b}_{k+1},...,\overline{b}_n,,\overline{a}_{k+1},...,\overline{a}_m$ מהווים בסיס של הסכום $U+W$.
לכן $\dim(U+W) = n+m-k = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$. מ.ש.ל.