הרצאה 7

תת-מרחבים קשורים למטריצה

הגדרה 1. תהיה $A\in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ מטריצה כלשהי. מרחב שנפרש ע"י שורות/עמודות המטריצה נקרא מרחב השורות/העמודות ומסומן כ- $C(A)/R(A)$. מימד של מרחב השורות/עמודות נקרא דרגת המטריצה לפי שורות/עמודות ומסומנת כ- $rank_C(A)/rank_R(A)$. ז"א

$$rank_R(A)=\dim(R(A)),rank_C(A)=\dim(C(A)).$$

נציין ש $R(A)\le F^n, C(A)\le F^m$. לכן $rank_R(A)\le n, rank_C(A)\le m$. מכוון $R(A)$ נפרש ע"י m שורות המימד של $R(A)$ קטן או שווה ל- m, כלומר $rank_R(A)\le m$. באופן דומה $rank_C(A)\le n$. קבלנו את התכונה הראשונה של דרגות המטריצה

$$rank_R(A)\le\min(m,n), rank_C(A)\le\min(m,n).$$

טענה 1. $rank_R(A)=rank_C(A^T), rank_C(A)=rank_R(A^T)$.

הוכחה נובעת מ- $R(A^T)=C(A), C(A^T)=R(A)$. מ.ש.ל.

טענה 2. תהיה $A\in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ מטריצה כלשהי. אז

1. לכל שתי מטריצות $S\in M_{n\times k}(\mathbf{R}), L\in M_{k\times m}(\mathbf{R})$ מתקיים $R(LA)\le R(A), C(AS)\le C(A)$.
2. אם $S\in M_{n\times n}(\mathbf{R}), L\in M_{m\times m}(\mathbf{R})$ הפיכות אז $R(LA)=R(A), C(AS)=C(A)$.

הוכחה

1. נוכיח קודם ש- $R(LA)\le R(A)$. לצורך זה נרשום A כמערך שורות $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\ \cdot\\A_m\end{pmatrix}$. אז שורה ה- i של המטריצה LA שווה ל-

$$(LA)_i=L_iA=(L_{i1},L_{i2},...,L_{im})\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\ \cdot\\A_m\end{pmatrix}=L_{i1}A_1+L_{i2}A_2+...+L_{im}A_m\in Sp(A_1,A_2,...,A_m)=R(A).$$

לכן $(LA)_i\in R(A)$ לכל $1\le i\le k$. מכאן נובע $R(LA)=Sp((LA)_1,...,(LA)_k)\le R(A)$.

נוכיח עכשיו ש- $C(AS) \le C(A)$. לצורך זה נרשום A כמערך עמודות $A = \left(A^1 A^2 ... A^n\right)$. אז העמודה ה- j של המטריצה AS שווה ל-

$$(AS)^j = AS^j = (A^1 A^2 ... A^n)\begin{pmatrix} S_{1j} \\ S_{2j} \\ . \\ S_{nj} \end{pmatrix} = S_{1j}A^1 + S_{2j}A^2 + ... + S_{nj}A^n \in Sp(A^1 A^2 ... A^n) = C(A).$$

לכן $(AS)^j \in C(A)$ לכל $1 \le j \le k$. מכאן נובע $C(AS) = Sp((AS)^1, ..., (AS)^k) \le C(A)$. מ.ש.ל.של 1.

2. נוכיח רק את השוויון $R(LA) = R(A)$ כי השני ניתן להוכיח באופן דומה.

מהחלק הראשון נובע ש- $R(LA) \le R(A)$. נציב עכשיו LA במקום A ו L^{-1} במקום L. נקבל $R(L^{-1}LA) \le R(LA) \Leftarrow R(A) \le R(LA)$. יחד עם האי-שוויון $R(LA) \le R(A)$ אנו מקבלים $R(LA) = R(A)$.

מ.ש.ל.

מסקנה 3. פעולות שורה/עמודה אלמנטריות לא משנות את מרחב השורות/עמודות.
הוכחה. ביצוע פעולה אלמטרית = כפל במטריצה האלמנטרית המתאימה + כל מטריצה אלמנטרית הפיכה.
מ.ש.ל.

משפט 4 (משפט הדרגה)
לכל $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ מתקיים $rank_C(A) = rank_R(A)$.
הוכחה
נוכיח קודם את האי-שוויון $rank_C(A) \le rank_R(A)$. נסמן $k := rank_R(A)$. אז $\dim(R(A)) = k$. ניקח בסיס של $R(A)$: $B_1, ..., B_k$ (נציין ש- $B_i \in F^n$). אז כל שורה של A היא צירוף לינארי של הבסיס:

$A_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} B_j$ לכל $i = 1, ..., m$. ניצור שתי מטריצות $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ . \\ B_k \end{pmatrix} \in M_{k \times n}(\mathbf{R})$ ו

$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & ... & \lambda_{1k} \\ . & ... & . \\ \lambda_{m1} & ... & \lambda_{mk} \end{pmatrix} \in M_{m \times k}(\mathbf{R})$. אז $A = \Lambda B$ ולפי טענה 2 $C(A) \le C(\Lambda)$. מכאן נובע.

$\dim(C(A)) \le \dim(C(\Lambda)) \Rightarrow rank_C(A) \le rank_C(\Lambda)$ במטריצה Λ יש k עמודות, לכן
$\dim(C(\Lambda)) \le k \Rightarrow \dim(C(A)) \le k \Rightarrow rank_C(A) \le k \Rightarrow rank_C(A) \le rank_R(A)$.
האי-שוויון $rank_C(A) \le rank_R(A)$ הוכח לכל מטריצה A. לכן ניתן להציב A^T במקום A
$rank_C(A^T) \le rank_R(A^T)$. לפי טענה 1 $rank_C(A) = rank_R(A^T), rank_R(A) = rank_C(A^T)$. לכן
$rank_R(A) \le rank_C(A)$. מכאן נובע $rank_R(A) = rank_C(A)$. מ.ש.ל.

מכוון ש- $rank_R(A)=rank_C(A)$ ניתן לסמן את המספר הזה כ- $rank(A)$. נקרא לו <u>דרגת המטריצה.</u>

טענה 5 (תכונות הדרגה). תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ מטריצה כלשהי בעלת דרגה r. אז

א. בצורה מדורגת קנונית של A יש r שורות שונות מאפס.

ב. במטריצה A יש r שורות/עמודות בת"ל.

ג. כל $r+1$ שורות/עמודות של המטריצה ת"ל.

ד. דרגת המטריצה לא משתנה כאשר מבצעים פעולות שורה/עמודה אלמנטריות.

הגדרה 2. תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ מטריצה כלשהי. מימד של גרעין המטריצה $Ker(A)=\{\bar{v}\in F^n \mid A\bar{v}^T=O\}$ נקרא <u>איפוס המטריצה</u> ומסומן כ- $null(A)$.

איפוס המטריצה שווה למספר המשתנים החופשיים בפתרון הכללי של הממ"ה $AX=O$. מספר המשתנים התלויים בפתרון הכללי שווה למספר שורות שונות מאפס בצורה קנונית של A ולכן שווה לדרגת המטריצה.

מכאן נובעת את הנוסחה הבאה:

$$rank(A)+null(A)=n. \qquad (7.1)$$

.