הרצאה 8

הגדרה 1. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ממימד סופי n. <u>בסיס סדור</u> $B=(\bar{b}_1,...,\bar{b}_n)$ של V הינו בסיס שעליו מוגדר יחס סדר מלא, ז"א סדר הוקטורים בבסיס חשוב.

טענה 1. יהי $B=(\bar{b}_1,...,\bar{b}_n)$ בסיס כלשהו של V. אז לכל וקטור $\bar{v}\in V$ קיימת סידרה אחת ויחידה של סקלרים $a_1,...,a_n\in F$ כך ש- $a_1\bar{b}_1+...+a_n\bar{b}_n=\bar{v}$.

הוכחה

הוקטורים $\bar{b}_1,...,\bar{b}_n$ פורשים את כל המרחב V לכן קיימים $a_1,...,a_n\in F$ כך ש- $a_1\bar{b}_1+...+a_n\bar{b}_n=\bar{v}$. כדי להוכיח יחידות נניח שיש עוד סידרת סקלרים $c_1,...,c_n\in F$ שמקיימת $c_1\bar{b}_1+...+c_n\bar{b}_n=\bar{v}$. אז $\bar{0}=\bar{v}-\bar{v}=(c_1\bar{b}_1+...+c_n\bar{b}_n)-(a_1\bar{b}_1+...+a_n\bar{b}_n)=(c_1-a_1)\bar{b}_1+...+(c_n-a_n)\bar{b}_n$. הוקטורים $\bar{b}_1,...,\bar{b}_n$ בת"ל לכן מהשוויון $(c_1-a_1)\bar{b}_1+...+(c_n-a_n)\bar{b}_n=\bar{0}$ אנו מקבלים $c_1-a_1=0,...,c_n-a_n=0$. מ.ש.ל.

הסקלרים $a_1,...,a_n$ בפירוק $\bar{v}=a_1\bar{b}_1+...+a_n\bar{b}_n$ נקראים <u>קואורדינטות</u> של הוקטור $\bar{v}$ בבסיס $B=(\bar{b}_1,...,\bar{b}_n)$. ה-n-יה $(a_1,...,a_n)$ מסומנת כ- $[\bar{v}]_B$. ז"א

$$\boxed{[\bar{v}]_B=(a_1,...,a_n)\Leftrightarrow a_1\bar{b}_1+...+a_n\bar{b}_n=\bar{v}} \tag{8.1}$$

טענה 2. יהי $B=(\bar{b}_1,...,\bar{b}_n)$ בסיס בדור של מרחב וקטורי V המוגדר מעל שדה F. אז

א. $[\bar{0}]_B=(0,...,0)$.

ב. $[\bar{u}+\bar{v}]_B=[\bar{u}]_B+[\bar{v}]_B$.

ג. $[\alpha\bar{u}]_B=\alpha[\bar{u}]_B$.

ד. $[\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\bar{v}_i]_B=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i[\bar{v}_i]_B$.

ה. הפונקציה $g:\bar{v}\to[\bar{v}]_B$ הפיכה.

הוכחה

א. $[\bar{0}]_B=(0,...,0)\Leftarrow\bar{0}=0\cdot\vec{b}_1+...+0\cdot\vec{b}_n$.

ב. נסמן $[\bar{u}]_B=(\alpha_1,...,\alpha_n),[\bar{v}]_B=(\beta_1,...,\beta_n)$. אז

$$\Leftarrow\bar{u}+\bar{v}=(\alpha_1+\beta_1)\bar{b}_1+...+(\alpha_n+\beta_n)\bar{b}_n\Leftarrow\bar{u}=\alpha_1\bar{b}_1+...+\alpha_n\bar{b}_n,\bar{v}=\beta_1\bar{b}_1+...+\beta_n\bar{b}_n$$
$$[\bar{u}+\bar{v}]_B=(\alpha_1+\beta_1,...,\alpha_n+\beta_n)=(\alpha_1,...,\alpha_n)+(\beta_1,...,\beta_n)=[\bar{u}]_B+[\bar{v}]_B.$$

ג. נסמן $[\bar{u}]_B=(\alpha_1,...,\alpha_n)$. אז

$$[\alpha\bar{u}]_B=(\alpha\alpha_1,...,\alpha\alpha_n)=\alpha(\alpha_1,...,\alpha_n)=\alpha[\bar{u}]_B\Leftarrow\alpha\bar{u}=(\alpha\alpha_1)\bar{b}_1+...+(\alpha\alpha_n)\bar{b}_n\Leftarrow\bar{u}=\alpha_1\bar{b}_1+...+\alpha_n\bar{b}_n$$

ד. אינדוקציה לפי k. אם $k=1$ אז הטענה נובעת מחלק ג'. נניח שהטענה הוכחה עבור $k-1$. אז $[\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\bar{v}_i]_B=[\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\bar{v}_i+\alpha_k\bar{v}_k]_B$. לפי חלקים ב' וג' $[\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\bar{v}_i+\alpha_k\bar{v}_k]_B=[\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\bar{v}_i]_B+\alpha_k[\bar{v}_k]_B$. לפי

הנחת האינדוקציה $[\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\bar{v}_i]_B = \sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i[\bar{v}_i]_B$. לכן

$$[\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\bar{v}_i+\alpha_k\bar{v}_k]_B = [\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\bar{v}_i]_B+\alpha_k[\bar{v}_k]_B = \sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i[\bar{v}_i]_B+\alpha_k[\bar{v}_k]_B = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i[\bar{v}_i]_B.$$

ה. נגדיר פונקציה $f : F^n \to V$ ע"י הנוסחה $f((\alpha_1,...,\alpha_n)) := \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{b}_i$ ונוכיח שהיא הפוכה ל- g:

$$g(f((\alpha_1,...,\alpha_n))) = g\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{b}_i\right) = \left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{b}_i\right]_B = (\alpha_1,...,\alpha_n)$$

ניקח $\bar{v}\in V$ כלשו. נסמן $[\bar{v}]_B = (\beta_1,...,\beta_n)$. אז $\bar{v} = \sum_{i=1}^{n}\beta_i\bar{b}_i$ $f(g(\bar{v})) = f([\bar{v}]_B) = f((\beta_1,...,\beta_n)) =$.

מ.ש.ל.

הגדרה 2. יהיו $A = (\bar{a}_1,...,\bar{a}_n), B = (\bar{b}_1,...,\bar{b}_n)$ שני בסיסים סדורים שלמחרב וקטורי V המוגדר מעל שדה F. מטירצה $_AT_B := \left([\bar{b}_1]_A^T\,[\bar{b}_2]_A^T...[\bar{b}_n]_A^T\right)$ נקראת <u>מטריצת-המעבר</u> מבסיס $B = (\bar{b}_1,...,\bar{b}_n)$ (בסיס ישן) לבסיס $A = (\bar{a}_1,...,\bar{a}_n)$ (בסיס חדש).

טענה 3. לכל $\bar{v}\in V$ מתקיים $[\bar{v}]_A^T = {}_AT_B[\bar{v}]_B^T$.

הוכחה.

נסמן $(\alpha_1,...,\alpha_n) := [\bar{v}]_A^T, (\beta_1,...,\beta_n) := [\bar{v}]_B^T$. אז $\bar{v} = \beta_1\bar{b}_1+...+\beta_n\bar{b}_n$ ולכן $[\bar{v}]_A = [\beta_1\bar{b}_1+...+\beta_n\bar{b}_n]_A$

לפי סעיף ד' של טענה 1, $[\beta_1\bar{b}_1+...+\beta_n\bar{b}_n]_A = \beta_1[\bar{b}_1]_A+...+\beta_n[\bar{b}_n]_A$. מכאן נובע ש-

$[\bar{v}]_A = \beta_1[\bar{b}_1]_A+...+\beta_n[\bar{b}_n]_A \Leftarrow ([\bar{v}]_A)^T = \beta_1([\bar{b}_1]_A)^T+...+\beta_n([\bar{b}_n]_A)^T$. נכתוב את השוויון האחרון

בצורה מטריציאלית $[\bar{v}]_A^T = ([\bar{b}_1]_A^T...[\bar{b}_n]_A^T)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \beta_n\end{pmatrix}$ מ.ש.ל.

דוגמה. נביט בתת-מרחב $W = \{(x,y,z)\mid x+y+z=0\}\le\mathbf{R}^3$. ניקח שני בסיסים

$A = \{\bar{a}_1 = (1,-2,1), \bar{a}_2 = (1,1,-2)\}, B = \{\bar{b}_1 = (1,-1,0), \bar{b}_2 = (0,-1,1)\}$. כדי למצוא מטריצת-המעבר $_AT_B$.

צריך לחשב קואורדינטות של הוקטורים $\bar{b}_1,\bar{b}_2$ בבסיס A.

כדי לחשב את $[\bar{b}_1]_A$ צריך לפתור ממ"ל $\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right)$. אחרי הדירוג נקבל $\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ לכן $[\bar{b}_1]_A = (1,1)$.

באופן דומה המטריצה $\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{array}\right)$ שקולה ל $\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$. לכן $[\bar{b}_1]_A = (1,-2)$ ו $_AT_B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

טענה 4 (תכונות של מטריצת מעבר).

יהיו A,B,C שלושה בסיסים כלשהם של מרחב V המוגדר מעל שדה F ($\dim(V) = n > 0$). אז

א. ${}_AT_A = I_n$.

ב. ${}_AT_B\,{}_BT_C = {}_AT_C$.

ג. ${}_AT_B\,{}_BT_A = I_n$.

ד. ${}_AT_B$ הפיכה ו $\left({}_AT_B\right)^{-1} = {}_BT_A$.

ה. לכל מטריצה הפיכה $S \in M_n(F)$ ולכל בסיס סדור B של V קיים בסיס A כך ש- ${}_AT_B = S$

הוכחה.

א. החלק הזה נובע מהשווין $[\bar{a}_i]_A = (0,...,0,1,0,...,0)$ (בוקטור $(0,...,0,1,0,...,0)$ הרכיב ה- i הוא הרכיב היחיד ששווה ל-1).

ב. ללא הוכחה.

ג. החלק הזה נובע מחלק ג' אם נציב A במקום C ונעזר בחלק א'.

חלק ד' נובע מחלק גי מיידית.

ה. ללא הוכחה.

מ.ש.ל.