הרצאה 9

הגדרה 1. יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל שדה F. פונקציה שלמה $L:V\to W$ נקראת <u>העתקה לינארית</u> כאשר היא מקיימת שני תנאים:

א. לכל שני וקטורים $\bar{u},\bar{v}\in V$ מתקיים $L(\bar{u}+\bar{v})=L(\bar{u})+L(\bar{v})$.

ב. לכל וקטור $\bar{v}\in V$ ולכל סקלר $\alpha\in F$ מתקיים $L(\alpha\bar{v})=\alpha L(\bar{v})$.

במקרה $V=W$ העתקה לינארית L נקראת <u>אופרטור</u> לינארי. במקרה $W=F$ העתקה לינארית נקראת <u>פונקציונל.</u>

דוגמאות.

א. העתקה טריביאלית היא פונקציה $O:V\to W$ המוגדרת ע"י הנוסחה $O(\bar{v})=\bar{0}$.

ב. לכל מטריצה $A\in M_{m\times n}(F)$ נגדיר פונקציה $L:F^n\to F^m$ ע"י הנוסחה $L(X):=AX$ (כאן $X\in F^n$ היא עמודה עם n רכיבים). נבדוק ש- L העתקה לינארית:

א. $L(X_1+X_2)=A(X_1+X_2)=AX_1+AX_2=L(X_1)+L(X_2)$.

ב. $L(\alpha X)=A(\alpha X)=\alpha(AX)=\alpha L(X)$.

טענה 1. תהי $L:V\to W$ העתקה לינארית כלשהי. אז

א. $L(\bar{0}_V)=\bar{0}_W$.

ב. לכל $\bar{v}\in V$ מתקיים $L(-\bar{v})=-L(\bar{v})$.

ג. $L(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{v}_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i L(\bar{v}_i)$

הוכחה

א. $\bar{0}_V=0\cdot\bar{0}_V \Leftarrow L(\bar{0}_V)=L(0\cdot\bar{0}_V) \underset{\text{ב'}}{\Leftarrow} L(\bar{0}_V)=0\cdot L(\bar{0}_V) \Leftarrow L(\bar{0}_V)=\bar{0}_W$.

ב. $-\bar{v}=(-1)\bar{v} \Leftarrow L(-\bar{v})=L((-1)\bar{v}) \underset{\text{ב'}}{\Leftarrow} L(-\bar{v})=(-1)L(\bar{v}) \Leftarrow L(-\bar{v})=-L(\bar{v})$.

ג. אינדוקציה לפי n. עבור $n=1$ השוויון נובע מחלק ב' של ההגדרה.

נניח עכשיו שהטענה נכונה עבור כל צירוף לינארי של n וקטורים, ז"א $L(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{v}_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i L(\bar{v}_i)$. עבור צירוף לינארי של $n+1$ וקטורים $\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\bar{v}_i$ נקבל:

$$L\left(\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\bar{v}_i\right)=L\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{v}_i+\alpha_{n+1}\bar{v}_{n+1}\right)\underset{\text{א'}}{=}L\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{v}_i\right)+L(\alpha_{n+1}\bar{v}_{n+1})\underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i L(\bar{v}_i)+\alpha_{n+1}L(\bar{v}_{n+1})=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i L(\bar{v}_i)$$

מ.ש.ל.

הגדרה. הקבוצה $Ker(L):=\{\bar{v}\in V \mid L(\bar{v})=\bar{0}\}$ נרקאת <u>גרעין</u> של ההעתקה לינארית $L:V\to W$ והקבוצה $\mathrm{Im}(L):=\{L(\bar{v}) \mid \bar{v}\in V\}$ נקראת <u>תמונה</u> של ההעתקה.

טענה 2. אם $L:V\to W$ העתקה לינארעת אז
1. $Ker(L)\le V$.
2. $\mathrm{Im}(L)\le V$.

הוכחה.

1. לפי חלק א' של טענה 1 $L(\bar{0})=\bar{0}$. לכן $\bar{0}\in Ker(L)$.

<u>סגירות ביחס לחיבור.</u> אם $\bar{v}_1,\bar{v}_2\in Ker(L)$ אז $L(\bar{v}_1)=\bar{0},L(\bar{v}_2)=\bar{0}$ ולכן $L(\bar{v}_1)+L(\bar{v}_2)=\bar{0}$. מחלק א' של הגדרה 1 מקבלים $L(\bar{v}_1+\bar{v}_2)=\bar{0}\Leftarrow \bar{v}_1+\bar{v}_2\in Ker(L)$.

<u>סגירות ביחס לכפל בסקלר.</u> אם $\bar{v}\in Ker(L)$ אז $L(\bar{v})=\bar{0}$ ולכל $\alpha\in F$ מתקיים $\alpha L(\bar{v})=\bar{0}$. מחלק ב' של הגדרה 1 מקבלים $L(\alpha\bar{v})=\bar{0}\Leftarrow \alpha\bar{v}\in Ker(L)$.

2. לפי חלק א' של טענה 1 $L(\bar{0})=\bar{0}$. לכן $\bar{0}\in \mathrm{Im}(L)$.

<u>סגירות ביחס לחיבור.</u> אם $\bar{w}_1,\bar{w}_2\in \mathrm{Im}(L)$ אז קיימים $\bar{v}_1,\bar{v}_2\in V$ כך ש $L(\bar{v}_1)=\bar{w}_1,L(\bar{v}_2)=\bar{w}_2$ ולכן $L(\bar{v}_1)+L(\bar{v}_2)=\bar{w}_1+\bar{w}_2$. מחלק א' של הגדרה 1 מקבלים $L(\bar{v}_1+\bar{v}_2)=\bar{w}_1+\bar{w}_2\Leftarrow \bar{w}_1+\bar{w}_2\in \mathrm{Im}(L)$.

<u>סגירות ביחס לכפל בסקלר.</u> אם $\bar{w}\in \mathrm{Im}(L)$ אז קיים $\bar{v}\in V$ כך ש $L(\bar{v})=\bar{w}$ ולכל $\alpha\in F$ מתקיים $\alpha L(\bar{v})=\alpha\bar{w}$. מחלק ב' של הגדרה 1 מקבלים $L(\alpha\bar{v})=\alpha\bar{w}\Leftarrow \alpha\bar{w}\in \mathrm{Im}(L)$.

מ.ש.ל.

טענה 3. תהי $L:V\to W$ העתקה לינארעת. אם $\bar{b}_1,...,\bar{b}_n$ קבוצה פרושת של V אז $Sp(L(\bar{b}_1),...,L(\bar{b}_n))=\mathrm{Im}(L)$.

הוכחה

לכל $1\le i\le n$ הוקטור $L(\bar{b}_i)$ שייך לתת-מרחב $\mathrm{Im}(L)$. לכן $Sp(L(\bar{b}_1),...,L(\bar{b}_n))\le \mathrm{Im}(L)$.

נוכיח עכשיו את האי-שוויון $\mathrm{Im}(L)\le Sp(L(\bar{b}_1),...,L(\bar{b}_n))$. ניקח וקטור כלשהו $\bar{w}\in \mathrm{Im}(L)$. אז קיים $\bar{v}\in V$ כך ש- $L(\bar{v})=\bar{w}$. מכוון ש- $\bar{b}_1,...,\bar{b}_n$ קבוצה פורשת של V, קיימים סקלרים $\beta_1,...,\beta_n$ שעבורם $\bar{v}=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\bar{b}_i$. מכאן נובע

$\bar{w}=L(\bar{v})\Rightarrow \bar{w}=L\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\bar{b}_i\right)\Rightarrow \bar{w}=\sum_{i=1}^{n}\beta_i L(\bar{b}_i)\Rightarrow \bar{w}\in Sp(L(\bar{b}_1),...,L(\bar{b}_n))$. קבלנו $\mathrm{Im}(L)\le Sp(L(\bar{b}_1),...,L(\bar{b}_n))$. מ.ש.ל.

טענה 4. תהי $L:V\to W$ העתקה לינארעת. אזי
א. $L(\bar{v}_1)=L(\bar{v}_2)\Leftrightarrow \bar{v}_1-\bar{v}_2\in Ker(L)$.
ב. L חד-חד-ערכית $\Leftrightarrow Ker(L)=\{\bar{0}\}$.

הוכחה

א. $\bar{v}_1-\bar{v}_2\in Ker(L)\Leftrightarrow L(\bar{v}_1-\bar{v}_2)=\vec{0}\Leftrightarrow L(\bar{v}_1)-L(\bar{v}_2)=\vec{0}\Leftrightarrow L(\bar{v}_1)=L(\bar{v}_2)$.

ב. $\Leftarrow$

ניקח $\bar{v}\in Ker(L)$ כלשהו. אז $L(\bar{v})=\bar{0}$ יחד עם $L(\bar{0})=\bar{0}$ אנו מקבלים $L(\bar{v})=L(\bar{0})$. מחד-חד-ערכיות נובע ש- $\bar{v}=\bar{0}$.

$\Rightarrow$

אם $L(\bar{v}_1)=L(\bar{v}_2)$ אז לפי חלק א' $\bar{v}_1-\bar{v}_2\in Ker(L)$. יחד עם השוויון $Ker(L)=\{\bar{0}\}$ אנו מקבלים $\bar{v}_1-\bar{v}_2=\bar{0}\Leftarrow\bar{v}_1=\bar{v}_2$ מ.ש.ל.

הגדרה. העתקה לינארית $L:V\to W$ נקראת <u>איזומורפיזם</u> כאשר היא הפיכה, ז"א חח"ע ועל. שני מרחבים מעל אותו שדה נקראים <u>איזומורפיים</u> כאשר קיים איזומורפיזם בינם.

מסקנה 5. העתקה לינארית $L:V\to W$ תהיה איזומורפיזם אם ורק אם $\operatorname{Im}(L)=W, Ker(L)=\{\bar{0}\}$.

משפט 6. תהיה $L:V\to W$ העתקה לינארית בין מרחבים ממימד סופי. אז

$$\dim(Ker(L))+\dim(\operatorname{Im}(L))=\dim(V)$$

הוכחה. נסמן $m:=\dim(\operatorname{Im}(L)), k:=\dim(Ker(L))$.

נבחר בסיס כלשהו של $\operatorname{Im}(L)$: $\bar{a}_1,...,\bar{a}_m$. לכל וקטורים $\bar{a}_i$ קיים $\bar{b}_i$ כך ש- $L(\bar{b}_i)=\bar{a}_i$. יחד עם זה נבחר בסיס $\bar{c}_1,...,\bar{c}_k$ של תת-מרחב $Ker(L)$. נוכיח שהוקטורים $\bar{b}_1,...,\bar{b}_m,\bar{c}_1,...,\bar{c}_k$ מהווים בסיס V.

נוכיח קודם ש- $Sp(\bar{b}_1,...,\bar{b}_m,\bar{c}_1,...,\bar{c}_k)=V$

האי-שוויון $Sp(\bar{b}_1,...,\bar{b}_m,\bar{c}_1,...,\bar{c}_k)\le V$ נובע מההכלה $\{\bar{b}_1,...,\bar{b}_m,\bar{c}_1,...,\bar{c}_k\}\subseteq V$. נוכיח את האי-שוויון ההפוך $Sp(\bar{b}_1,...,\bar{b}_m,\bar{c}_1,...,\bar{c}_k)\ge V$. לצורך זה ניקח וקטור $\bar{v}\in V$ כלשהו. הוקטור $L(\bar{v})$ שייך ל- $\operatorname{Im}(L)$. לכן קיימים $\alpha_1,...,\alpha_m\in F$ כך ש- $L(\bar{v})=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{a}_i$. יחד עם $L(\bar{b}_i)=\bar{a}_i$ אנו מקבלים $L(\bar{v})=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i L(\bar{b}_i)$. מהלינאריות של L מקבלים $L(\bar{v})=L\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{b}_i\right)$. מחלק א' של טענה 4 נובע ש $\bar{v}-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{b}_i\in Ker(L)$. $\bar{c}_1,...,\bar{c}_k$ בסיס של $Ker(L)$, לכן קיימים סקלרים $\gamma_1,...,\gamma_k\in F$ כך ש- $\bar{v}-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{b}_i=\sum_{i=1}^{k}\gamma_i\bar{c}_i$. מכאן נובע $\bar{v}=\sum_{i=1}^{k}\gamma_i\bar{c}_i+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{b}_i\Leftarrow\bar{v}\in Sp(\bar{b}_1,...,\bar{b}_m,\bar{c}_1,...,\bar{c}_k)$. הוכחנו ש- $Sp(\bar{b}_1,...,\bar{b}_m,\bar{c}_1,...,\bar{c}_k)\ge V$. לכן $Sp(\bar{b}_1,...,\bar{b}_m,\bar{c}_1,...,\bar{c}_k)=V$.

נוכיח עכשיו שהוקטורים $\bar{b}_1,...,\bar{b}_m,\bar{c}_1,...,\bar{c}_k$ בת"ל.

נביט במשוואה

$$(*)\quad \beta_1\bar{b}_1+...\beta_m\bar{b}_m+\gamma_1\bar{c}_1+...+\gamma_k\bar{c}_k=\bar{0}.$$

נפעיל L על שני הצדדים. נקבל

$$L(\beta_1\bar{b}_1+...\beta_m\bar{b}_m+\gamma_1\bar{c}_1+...+\gamma_k\bar{c}_k)=L(\bar{0})=\bar{0}\Rightarrow\beta_1L(\bar{b}_1)+...\beta_mL(\bar{b}_m)+\gamma_1L(\bar{c}_1)+...+\gamma_kL(\bar{c}_k)=\bar{0}$$

$\{\bar{c}_1,...,\bar{c}_k\}\subseteq Ker(L)\Rightarrow L(\bar{c}_1)=\bar{0}...,L(\bar{c}_k)=\bar{0}\Rightarrow\beta_1\vec{a}_1+...\beta_m\bar{a}_m=\bar{0}$. הוקטורים $\bar{a}_1,...,\bar{a}_m$ בת"ל, לכן $\beta_1=0,...,\beta_m=0$. נציב את הערכים האלה למשוואה המקורית, נקבל $\gamma_1\bar{c}_1+...+\gamma_k\bar{c}_k=\bar{0}$. הוקטורים $\bar{c}_1,...,\bar{c}_k$ גם בת"ל, לכן $\gamma_1\bar{c}_1+...+\gamma_k\bar{c}_k=\bar{0}\Rightarrow\gamma_1=0,...,\gamma_k=0$. הוכחנו שלמשוואה (*) יש פתרון טריביאלי בלבד. לכן הוקטורים $\bar{b}_1,...,\bar{b}_m,\bar{c}_1,...,\bar{c}_k$ בת"ל.

הוכחנו ש- $\bar{b}_1,...,\bar{b}_m,\bar{c}_1,...,\bar{c}_k$ בסיס של V. לכן $\dim(V)=m+k=\dim(\mathrm{Im}(L))+\dim(Ker(L))$. מ.ש.ל.

מסקנה 7. אם מרחבים V,W איזומורפיים אז $\dim(V)=\dim(W)$

הוכחה

מהגדרת האיזומורפיזם נובע שקיימת העתקה לינארית $L:V\to W$ שהיא חח"ע ועל. לפי מסקנה 5 $\mathrm{Im}(L)=W, Ker(L)=\{\bar{0}\}$. נציב את הנתונים האלה למשפט 6:
$\dim(W)+\dim(\{\bar{0}\})=\dim(V) \Leftarrow \dim(W)=\dim(V)$. מ.ש.ל.

משפט 8. יהיו V,W מרחביים סוף מימדיים, $\dim(V)=n,\dim(W)=m$. אזי לכל בסיס סדור $B=(\bar{b}_1,...,\bar{b}_n)$ של V ולכל סידרה $\bar{w}_1,...,\bar{w}_n\in W$ קיימת העתקה לינארית אחת ויחידה $L:V\to W$ שמקיימת $L(\bar{b}_i)=\bar{w}_i$ לכל $i=1,...,n$.

הוכחה

נוכיח קודם את קיומה של העתקה לינארית.

נגדיר פונקציה $L:V\to W$ ע"י הנוסחה $L(\bar{v})=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\bar{w}_i$ כאשר $\beta_1,...,\beta_n$ קואורדינטות של הוקטור $\bar{v}$ בבסיס B (ז"א $(\beta_1,...,\beta_n)=[\bar{v}]_B$). הפונקציה L מוגדרת היטב, כי וקטור הקואורדינטות $(\beta_1,...,\beta_n)$ מוגדר חד-משמעית ע"י $\bar{v}$. נציין ש- $L(\bar{b}_i)=\bar{w}_i$ לכל $i=1,...,n$.

<u>א. L העתקה לינארית.</u>

ניקח שני וקטורים $\bar{u},\bar{v}\in V$ כלשהם ונסמן את הקואורדינטות שלהם כ $(\alpha_1,...,\alpha_n)=[\bar{u}]_B,(\beta_1,...,\beta_n)=[\bar{v}]_B$. לפי טענה 2 מהרצאה 8 $[\bar{u}+\bar{v}]_B=(\alpha_1+\beta_1,...,\alpha_n+\beta_n)$. מכאן נובע

$$L(\bar{u}+\bar{v})=(\alpha_1+\beta_1)\bar{w}_1+..+(\alpha_n+\beta_n)\bar{w}_n \Rightarrow L(\bar{u}+\bar{v})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{w}_i+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\bar{w}_i \Rightarrow L(\bar{u}+\bar{v})=L(\bar{u})+L(\bar{v})$$

$$[\bar{u}]_B=(\alpha_1,...,\alpha_n) \Rightarrow [\alpha\bar{u}]_B=(\alpha\alpha_1,...,\alpha\alpha_n) \Rightarrow L(\alpha\bar{u})=\sum_{i=1}^{n}\alpha\alpha_i\bar{w}_i \Rightarrow L(\alpha\bar{u})=\alpha\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{w}_i \Rightarrow L(\alpha\bar{u})=\alpha L(\bar{u})$$

<u>ב. יחידות.</u>

נניח ש- $M:V\to W$ העתקה לינארית המקיימת $M(\bar{b}_i)=\bar{w}_i, i=1,...,n$. ניקח $\bar{v}\in V$ כלשהו. נסמן $[\bar{v}]_B=(\beta_1,...,\beta_n)$. אז $\bar{v}=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\bar{b}_i$ ולכן

$$M(\bar{v})=M\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\bar{b}_i\right) \Rightarrow M(\bar{v})=\sum_{i=1}^{n}\beta_i M(\bar{b}_i) \Rightarrow M(\bar{v})=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\bar{w}_i$$. לפי הגדרת הפונקציה L:

$L(\bar{v})=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\bar{w}_i$. מכאן נובע ש- $M(\bar{v})=L(\bar{v})$ מתקיים לכל $\bar{v}\in V$. כלומר $L=M$. מ.ש.ל.

מסקנה 9. יהיו V,W מרחביים סוף מימדיים. אם $\dim(V)=\dim(W)$ אז המרחבים V,W איזומורפיים.

הוכחה

נסמן $n:=\dim(V)=\dim(W)$. נבחר שני בסיסים סדורים $B=(\bar{b}_1,...,\bar{b}_n)$ ו $A=(\bar{a}_1,...,\bar{a}_n)$ (B בסיס של V

ו A בסיס של W). לפי משפט 8 קיימת העתקה לינארית $L:V\to W$ שמעבירה $\bar{b}_i$ ל- $\bar{a}_i$ (ז"א $L(\bar{b}_i)=\bar{a}_i$).
מטענה 3 נובע ש- $\operatorname{Im}(L)=Sp(L(\bar{b}_1),...,L(\bar{b}_n)) \Rightarrow \operatorname{Im}(L)=Sp(\bar{a}_1,...,\bar{a}_n) \Rightarrow \operatorname{Im}(L)=W$. לפי משפט 8
$\dim(V)=\dim(W)+\dim(Ker(L)) \Rightarrow n+\dim(Ker(L))=n \Rightarrow \dim(Ker(L))=0 \Leftrightarrow Ker(L)=\{\bar{0}\}=0$
ממסקנה 5 נובע ש- L איזומורפיזם. מ.ש.ל.

מסקנה 10. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. אם $\dim(V)=n$ אזי V איזומורפי ל- F^n.