הרצאה 10

מטריצה של העתקה לינארית

תהי $L:V\to W$ העתקה לינארית בין שני מרחבים ממימד סופי (V,W מוגדרים מעל שדה F). נסמן $\dim(V)=n,\dim(W)=m$. נבחר שני בסיסים סדורים $A=(\bar a_1,...,\bar a_m),B=(\bar b_1,...,\bar b_n)$ (A בסיס של W, B בסיס של V). המטריצה $\left([L(\bar b_1)]_A^T\,[\bar b_2]_A^T...[\bar b_n]_A^T\right)$ נקראת <u>מטריצה</u> של העתקה לינארית בבסיסים A ו B ומסומנת כ- ${}_A[L]_B$. נציין ש- ${}_A[L]_B$ היא מטריצה מסדר $m\times n$.

אם L אופרטור לינארי (ז"א $V=W$ ו $A=B$) אז במקום ${}_B[L]_B$ נכתוב $[L]_B$. מטריצה $[L]_B$ היא מטריצה ריבועית מסדר n.

טענה 1. לכל $\bar v\in V$ מתקיים ${}_A[L]_B[\bar v]_B^T=[L(\bar v)]_A^T$.

הוכחה.

נסמן $[\bar v]_B=(\beta_1,...,\beta_n)$. אז $\bar v=\sum_{i=1}^n\beta_i\bar b_i$ מכאן נובע

$$L(\bar v)=L\left(\sum_{i=1}^n\beta_i\bar b_i\right)\Rightarrow L(\bar v)=\sum_{i=1}^n\beta_iL(\bar b_i)\Rightarrow\left[L(\bar v)\right]_A=\left[\sum_{i=1}^n\beta_iL(\bar b_i)\right]_A\Rightarrow\left[L(\bar v)\right]_A=\sum_{i=1}^n\beta_i[L(\bar b_i)]_A.$$

נפעיל ^{T} לשני הצדדים:

$$\left[L(\bar v)\right]^T=\sum_{i=1}^n\beta_i[L(\bar b_i)]_A^T\Rightarrow\left[L(\bar v)\right]_A^T=\left([L(\bar b_i)]_A^T\,[L(\bar b_2)]_A^T\ldots[L(\bar b_n)]_A^T\right)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \cdot\\ \beta_1\end{pmatrix}\Rightarrow{}_A[L]_B[\bar v]_B^T=[L(\bar v)]_A^T$$

מ.ש.ל.

דוגמה 1. נביט בהעתקה לינארית $L:\mathbf{R}_2[x]\to\mathbf{R}^4$ המוגדרת ע"י הנוסחה $L(p(x))=(p(0),p(1),p'(0),p'(1))$. אם נכתוב $p(x)=ax^2+bx+c$ אז $L(p(x))=(c,a+b+c,b,2a+b)$.

לבניית המטריצה נבחר בסיסים סטנדרטיים בשני המרחבים: $B=(\bar b_1=x^0,\bar b_2=x^1,\bar b_3=x^2)$ (בסיס של $\mathbf{R}_2[x]$) ו $A=(\bar a_1=(1,0,0,0),\bar a_2=(0,1,0,0),\bar a_3=(0,0,1,0),\bar a_4=(0,0,0,1))$ (בסיס של $\mathbf{R}^4$). מהגדרת ההעתקה מקבלים:

$$\begin{cases}L(\bar b_1)=(1,1,0,0)\Rightarrow[L(\bar b_1)]_A=(1,1,0,0),\\ L(\bar b_2)=(0,1,1,1)\Rightarrow[L(\bar b_2)]_A=(0,1,1,1),\\ L(\bar b_3)=(0,1,0,2)\Rightarrow[L(\bar b_3)]_A=(0,1,0,2)\end{cases}\Rightarrow{}_A[L]_B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

הקואורדינטות של הפולינום $p(x)=ax^2+bx+c$ בבסיס הסטנדרטי הן: $[p(x)]_B=(c,b,a)$. לכן הקואורדינטות של התמונה $L(p(x))$ בבסיס הסטנדרטי A שוות ל

$$L(p(x))=(c,c+b+a,b,b+2a)\Leftarrow[L(p(x))]_B=(c,c+b+a,b,b+2a)\Leftarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\b\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\c+b+a\\b\\b+2a\end{pmatrix}$$

דוגמה 2. נביט באופרטור לינארי $L:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ המוגדר ע"י הנוסחה $L((x,y))=(2x+3y,2x+y)$. נבחר בסיס $\bar{b}_1=(3,2),\bar{b}_2=(1,-1)$ ונחשב $[L]_B$:

$$.[L]_B=\begin{pmatrix}4&0\\0&-1\end{pmatrix}\Leftarrow\begin{cases}[L(\bar{b}_1)]_B=(4,0)\Leftarrow L(\bar{b}_1)=(12,8)=4\bar{b}_1\\ [L(\bar{b}_2)]_B=(0,-1)\Leftarrow L(\bar{b}_2)=(-1,1)=-\bar{b}_2\end{cases}$$

משפט 2. תהי $L:V\to W$ העתקה לינארית בין שני מרחבים ממימד סופי (V,W מוגדרים מעל שדה F).
נסמן $\dim(V)=n,\dim(W)=m$. אם B,B' שני הבסיסים של V ו A,A' שני בסיסים של W . אז
$_{A'}[L]_{B'}={}_{A'}T_A\cdot{}_A[L]_B\cdot{}_BT_{B'}$ כאשר $_BT_{B'}$ ו $_{A'}T_A$ הן מטריצות מעבר.
הוכחה. ללא הוכחה.

במקרה ש- $L:V\to V$ אופרטור לינארי מקבלים את הנוסחה הבאה שמקשרת בין מטריצות האופרטור בבסיסים השונים. אם B,B' שני הבסיסים של V אז

$$P={}_BT_{B'} \text{ כאשר } [L]_{B'}=P^{-1}\cdot[L]_B\cdot P\Leftarrow[L]_{B'}={}_{B'}T_B\cdot[L]_B\cdot{}_BT_{B'}\qquad(1)$$

אופרטורים לינאריים

מעכשיו $L:V\to V$ יהיה אופרטור לינארי מעל מרחב וקטורי V. המרחב מוגדר מעל שדה F ו $\dim(V)=n$.

הגדרה 2. וקטור $\bar{v}\in V-\{\bar{0}\}$ נקרא <u>וקטור עצמי</u> של אופרטור L כאשר $L(\bar{v})$ פרופורציונאלי ל- $\bar{v}$, ז"א קיים סקלר $\lambda\in F$ כך ש- $L(\bar{v})=\lambda\bar{v}$. הסקלר λ נקרא <u>ערך עצמי</u> של $\bar{v}$ (ושל L).אומרים גם שוקטור $\bar{v}$ <u>שייך לערך העצמי</u> λ. בסיס של V נקרא <u>בסיס עצמי</u> של L אם כל וקטור של הבסיס הוא וקטור עצמי של L.
הטענה הבאה נובעת מיידית מטענה 1.

טענה 3. בסיס B של מרחב V יהיה בסיס עצמי של אופרטור $L:V\to V$ אם ורק אם המטריצה $[L]_B$ אלכסונית.

למשל בסיס בדוגמה 2 הוא בסיס עצמי של האופרטור.

בהמשך נתעסק בשאלה: איך למצוא בסיס עצמי של האופרטור הנתון (אם בסיס כזה קיים בכלל)? מהנוסחה (1) נובע שהשאלה הזאת שקולה לשאלה הבאה: נתונה מטריצה ריבועית $A\in M_n(F)$, האם קיימת מטריצה הפיכה $P\in M_n(F)$ כך ש- $P^{-1}AP$ אלכסונית? כדי לענות על השאלה הזאת אנו צריכים להגדיר כמה מושגים חדשים.

הגדרה 3. שתי מטריצות $A,B\in M_n(F)$ נקראות <u>צמודות/דומות</u> (סימון $A\sim B$) אם קיימת מטריצה הפיכה $P\in M_n(F)$ כך ש- $P^{-1}AP=B$ (מטריצה P נקראת מטריצה <u>מצמידה</u>). מטריצה צמודה למטריצה אלכסונית נקראת מטריצה <u>לכסינה</u>.

טענה 4. יחס ~ הינו יחס שקילות.

הוכחה

א. רפלקסיביות. $A = I_n^{-1} A I_n \Leftarrow A \sim A$.

ב. סימטריות. אם $A \sim B$ אז קיימת מטריצה הפיכה $P \in M_n(F)$ כך ש- $P^{-1}AP = B$. מכאן נובע ש-
$A = PBP^{-1} \Leftarrow A = \left(P^{-1}\right)^{-1} BP^{-1} \Leftarrow B \sim A$.

ג. טרנזיטיביות. אם $A \sim B$ ו $B \sim C$ אז קיימים מטריצות הפיכות $P, Q \in M_n(F)$ כך ש $P^{-1}AP = B$ ו $Q^{-1}BQ = C$. לכן $Q^{-1}P^{-1}APQ = C \Leftarrow (PQ)^{-1}A(PQ) = C \Leftarrow A \sim C$. מ.ש.ל.

מחלקות השקילות של היחס ~ נקראות <u>מחלקות צמידות</u>. מחלקת צמידות הנוצרת ע"י מטריצה ריבועית $A \in M_n(F)$ שווה ל- $\{P^{-1}AP \mid P \in GL_n(F)\}$ אשר $GL_n(F)$ מסמן את קבוצת המטריצות ההפיכות מסדר n.

טענה 5. מטריצה סקלרית αI_n צמודה רק לעצמה.

הוכחה. לכל $P \in M_n(F)$ הפיכה מתקיים $P^{-1}(\alpha I_n)P = \alpha I_n$. מ.ש.ל.

דוגמה 3. נביט בקבוצת המטריצות $M_2(\mathbf{Z}_2)$. 16 מטריצות מתחלקות ל-6 מחלקות צמידות:

$$\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\},$$
$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\},$$
$$\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

טענה 6. אם $A \sim B$ אזי $|A| = |B|$.

הוכחה. $A \sim B \Leftarrow$ קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $B = P^{-1}AP$. אז
$|B| = |P^{-1}| \cdot |A| \cdot |P| \Leftarrow |B| = |P|^{-1} \cdot |A| \cdot |P| \Leftarrow |B| = |A|$ מ.ש.ל.

שוויון הדטרמיננטות הוא תנאי הכרחי לצמידות אך לא מספיק. למשל, למטריצות $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ יש אותה דטרמיננטה, אך הן לא צמודות.

הגדרה 4. יהי x משתנה חופשי. דטומיננטה של המטריצה $xI_n - A$ נקראת <u>פולינום אופייני</u> של A ומסומנת כ- $p_A(x)$.

דוגמה 4. אם $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אז

$$\Leftarrow p_A(x)=\begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} \Leftarrow p_A(x)=\left| x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|$$

$$p_A(x)=x^2-(a+d)x+(ad-bc) \Leftarrow p_A(x)=\begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix}$$

טענה 7. אם $A\sim B$ אזי $p_A(x)=p_B(x)$.

הוכחה. $A\sim B \Leftarrow$ קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $B=P^{-1}AP$. אז

$$p_B(x)=|xI_n-B|=|xI_n-P^{-1}AP|\Rightarrow$$
$$p_B(x)=|xP^{-1}I_nP-P^{-1}AP|\Rightarrow$$
$$p_B(x)=|P^{-1}(xI_n)P-P^{-1}AP|\Rightarrow$$
$$p_B(x)=|P^{-1}|\cdot|xI_n-A|\cdot|P|\Rightarrow$$
$$p_B(x)=p_A(x)$$

מ.ש.ל.

שוויון בין הפולינומים האופייניים הוא תנאי הכרחי לצמידות אך לא מספיק. למשל, למטריצות $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ יש אותו פולינום אופייני x^2-2x+1, אך הן לא צמודות.

טענה 8. אם $A\in M_n(F)$ אז $p_A(x)\in F[x]$ ו $p_A(x)=x^n-tr(A)x^{n-1}+...+(-1)^n|A|$ אשר $tr(A):=A_{11}+A_{22}+...A_{nn}$ עיקבה של המטריצה A.
הוכחה. ללא הוכחה.

מסקנה 9. אם $A\sim B$ אז $tr(A)=tr(B)$.

הגדרה 5. סקלר $\lambda\in F$ נקרא <u>ערך עצמי</u> (קיצור ע"ע) של מטריצה $A\in M_n(F)$ אם $p_A(\lambda)=0$. וקטור $\bar{v}\in F^n$ השונה מאפס נקרא <u>וקטור עצמי השייך לערך העצמי</u> λ אם $A\bar{v}^T=\lambda\bar{v}^T$.

טענה 10. יהי $\lambda\in F$ סקלר כלשהו.
א. תת-מרחב $V_\lambda(A):=Ker(\lambda I_n-A)$ אינו טריביאלי אם ורק אם λ ע"ע של A.
ב. אם λ ע"ע של A אז וקטור $\bar{v}\in F^n-\{\bar{0}\}$ הוא וקטור עצמי השייך ל- λ אם ורק אם $\bar{v}\in V_\lambda(A)$.
הוכחה.
א. למערכת הומוגנית $(\lambda I_n-A)X=O$ קיים פתרון לא טריביאלי אם ורק אם הדטרמיננטה $|\lambda I_n-A|$ שווה לאפס. מ.ש.ל. א'.

ב. וקטור $\bar{v}\in F^n-\{\bar{0}\}$ הוא וקטור עצמי השייך ל- λ אם ורק אם $A\bar{v}^T=\lambda\bar{v}^T$. השוויון האחרון שקול ל: $A\bar{v}^T=\lambda\bar{v}^T\Leftrightarrow\lambda\bar{v}^T-A\bar{v}^T=O\Leftrightarrow(\lambda I_n-A)\bar{v}^T=O\Leftrightarrow\bar{v}\in Ker(\lambda I_n-A)$. מ.ש.ל.
המרחב $V_\lambda(A)$ נקרא <u>המרחב העצמי</u> של ע"ע λ.

טענה 11. אם $A\sim B$ אז ל-A ו B יש אותם ערכים עצמיים ולכל ע"ע λ מתקיים $\dim V_\lambda(A)=\dim V_\lambda(B)$

הוכחה. מ-$A\sim B$ נובע שקיימת $P\in GL_n(F)$ כך ש-$B=P^{-1}AP$. מטענה 7 נובע ש-$p_A(x)=p_B(x)$. לכן לשני פולינומים אופיינים יש אות שורשים. ז"א לשתי המטריצות יש אותם ערכים עצמיים. ניקח עכשיו ע"ע λ כלשהו של A ו B. אז $\lambda I_n-B=\lambda I_n-P^{-1}AP \Rightarrow \lambda I_n-B=P^{-1}(\lambda I_n-A)P$. לפי טענה 2 מהרצאה 7 $rank(\lambda I_n-B)=rank(\lambda I_n-A)$. מכאן נובע

$$\dim V_\lambda(A)=\dim(Ker(\lambda I_n-A))=n-rank(\lambda I_n-A)=n-rank(\lambda I_n-B)=\dim(Ker(\lambda I_n-B))=\dim V_\lambda(B)$$

מהמשפט הזה נובע שהמטריצות $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ אינן צמודות, כי $\dim V_1(A)=2\neq 1=\dim V_1(B)$.

משפט 12. תהי $A\in M_n(F)$ מטריציה ריבועית כלשהי ו $\lambda_1,...,\lambda_k$ הערכים העצמיים שלה. אזי A לכסינה אם ורק אם היא מקיימת שני תנאים הבאים:

א. הפולינום האופייני שלה מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים: $p_A(x)=(x-\lambda_1)^{m_1}\cdot...\cdot(x-\lambda_k)^{m_k}$.

ב. $\sum_{i=1}^{k}\dim(V_{\lambda_i})=n$.

הוכחה. נוכיח רק שהתנאים א-ב הכרחיים לליכסון המטריצה. נניח שקיימת מטריצה הפיכה $P\in GL_n(F)$ כך ש-$P^{-1}AP=D$ אשר D מטריצה אלכסונית: $D=\begin{pmatrix}D_{11}&0&0&...&0\\0&D_{22}&0&...&0\\0&0&D_{33}&...&0\\.&.&.&...&.\\0&0&0&...&D_{nn}\end{pmatrix}$. לפי טענה 7 $p_A(x)=p_D(x)=(x-D_{11})(x-D_{22})\cdot...\cdot(x-D_{nn})$. נקח ע"ע λ_i של A. אז $p_A(\lambda_i)=0 \Rightarrow p_A(\lambda_i)=0 \Rightarrow \lambda_i$ מופיע בין אברי האלכסון $D_{11},D_{22},...,D_{nn}$ פעם אחת לפחות. נסמן כ-m_i את ריבוי של λ_i (ז"א מספר פעמים ש λ_i מופיע על האלכסון של D). אז

$$p_A(x)=p_D(x)=(x-D_{11})(x-D_{22})\cdot...\cdot(x-D_{nn})=(x-\lambda_1)^{m_1}\cdot...\cdot(x-\lambda_k)^{m_k}.$$

הוכחנו חלק א'.

לפי טענה 11 $\dim V_{\lambda_i}(A)=\dim V_{\lambda_i}(D)$. המימד של $V_{\lambda_i}(D)=Ker(\lambda_i I_n-D)$ שווה ל-$n-rank(\lambda_i I_n-D)$. מכוון ש-$\lambda_i I_n-D$ מטריצה אלכסונית, הדרגה שלה שווה למספר אברי האלכסון השונים מאפס, ז"א $rank(\lambda_i I_n-D)=n-m_i$. מכאן נובע $\dim V_{\lambda_i}(A)=\dim V_{\lambda_i}(D)=m_i$ ו $\sum_{i=1}^{k}\dim(V_{\lambda_i})=\sum_{i=1}^{k}m_i=n$. מ.ש.ל.