

בחן ראשון בלינארית התשס"ו למדעי מחשב
יום ה, 17-11-2005 ט"ו חשון התשסו שעה 9:30

שאלה 1

הצג בצורה וקטורית את פתרון המערכת:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z + w = 0 \\ x - y + z - w = 4 \\ 4x + 2y + 4z + 2w = 4 \\ 5x + 3y + 5z + 3w = 4 \end{array} \right.$$

תשובה:

נעבד עם מטריצות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_2 - s_1 \rightarrow s_2, s_3 - 4s_1 \rightarrow s_3, s_4 - 5s_1 \rightarrow s_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_3 - s_2 \rightarrow s_3, s_4 - s_2 \rightarrow s_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_2 / -2 \rightarrow s_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_2 / -2 \rightarrow s_2}$$

נשים לב כי עוד נותר לאפס כלפי מעלה.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_1 - s_2 \rightarrow s_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

ולכן $x+z=2, y+w=-2, x=2-z, y=-2-w$ וקטורי:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-z \\ -2-w \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 2

מצא עבור אלו ערכים של b יש למערכת הבאה פתרון יחיד,
אינסוף פתרונות ואין פתרון:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + (b+1)y + bz = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 18 - 2b \\ 5x + 10y + 6z = 9 - b \end{array} \right.$$

תשובה:

נעבד עם מטריצות:

$$\begin{pmatrix} 1 & b+1 & b & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 18-2b \\ 5 & 10 & 6 & 9-b \end{pmatrix} \xrightarrow{s_2/2 \rightarrow s_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & b+1 & b & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 9-b \\ 5 & 10 & 6 & 9-b \end{pmatrix} \xrightarrow{s_2-s_1 \rightarrow s_2, s_3-5s_1 \rightarrow s_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & b+1 & b & 0 \\ 0 & 1-b & 3-b & 9-b \\ 0 & 5-5b & 6-5b & 9-b \end{pmatrix} \xrightarrow{s_3-5s_2 \rightarrow s_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & b+1 & b & 0 \\ 0 & 1-b & 3-b & 9-b \\ 0 & 0 & -9 & 4b-36 \end{pmatrix}$$

ולכן נשים לב כי האבר היחיד שיכול להתאפס על האלכסון הוא בשורה השניה. אם b שונה מ-1, כל אברי האלכסון שונים מ-0 ולכן יש פתרון יחיד.

אם $b=1$ נציב במשוואות השניה והשלישית. השניה יוצאת $2z=8$ והשלישית $-9z=-32$ סתירה ולכן אז למערכת אין פתרון.