בחן שני בלינארית התשס"ו למדעי מחשב
יום ה, 8-12-2005 ז כסלו התשסו שעה 9:30

שאלה 1

מצא את ההפוכה של המטריצה:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

תשובה:

נעבד עם מטריצות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_2-4s_1\to s_2,\, s_3-7s_1\to s_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -13 & -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_3-2s_2\to s_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_3-2s_2\to s_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_1+3s_3\to s_1,\, s_2-6s_3\to s_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -10 & 13 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_3/(-1)\to s_3,\, s_2/(-3)\to s_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 10/3 & -13/3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_1-2s_2\to s_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8/3 & 8/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 10/3 & -13/3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_1-2s_2\to s_1}$$

ולכן

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-8 & 8 & -3\\ 10 & -13 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}$$

שאלה 2

הוכח כי כפל מטריצות מקים את חק הפלוג (דיסטריבוטיביות):
נתונות מטריצה A שממדיה (mxn) ומטריצות C,B שממדיהן (nxp) אז שני הצדדים של השויון הבא מוגדרים ושוים:
A(B+C)=AB+AC

תשובה:

כיון ש C,B מצריצות (nxp) כך גם סכומן, ולכן
AB,AC,A(B+C) כולן מטריצות (mxp) ולכן כך גם
AB+AC ונותר רק לבדק את שויון ערכיהן המתאימים.

נבחר i,j כך ש- 1□i□m,1□j□p שיצינו שורה ועמודה כללית. אז:

$$[A(B+C)]_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(B+C)_{k,j}=\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(B_{k,j}+C_{k,j})=$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}+A_{i,k}C_{k,j}=\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}+\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}C_{k,j}=$$

$$(AB)_{i,j}+(AC)_{i,j}=(AB+AC)_{i,j}$$