מבחן סופי באלגברה לינארית א למדעי המחשב

סמסטר סתו התשע״ה מועד א,יום ה, טז שבט התשע״ה 5-2-2015

- מורה : גיורא דולה, מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלוש שעות.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות תכתבנה במחברות.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .
- עליך לענות על 11 שאלות ב-4 חלקים.
- בחלק הראשון 7 שאלות במשקל של 10 נקודות כל אחת. עליך לבחור 6 מתוך 7 שאלות סה״כ 60 נקודות בחלק הראשון.
- בחלק השני 4 שאלות במשקל של 5 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לסמן במעגל את האופציה הנכונה, ולהוסיף נמוק קצר. הסימון והנמוק יהיו בשאלון. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית. סה״כ 20 נקודות בחלק השני.
- בחלק השלישי שאלת נסוח והוכחה אחת בת משקל של 20 נקודות
- 60+20+20=100

בהצלחה.

חלק א- שאלות 1-7 ועליך לבחור מתוכן ולענות על 6. משקל כל שאלה 10 נקודות.

שאלה 1 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & =1 \\ 3x & -3y & -4z & =4 \\ 2x & -y & +3z & =-3 \end{cases}$$

מעל השדה מודולו שבע Z_7.

א. חשב את המטריצה ההפוכה של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את הפתרון של המערכת.

שאלה 2 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x & +(2b+1)y & +6z & =b-3 \\ 2x & +15y & +(5b-1)z & =b-2 \\ 3x & +22y & +20z & =1 \end{cases}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד.

שאלה 3 (10 נקודות)

נתונה A_n מטריצה רבועית nxn המוגדרת על ידי

$$A_{i,j} = \begin{cases} (-1)^i & j = i-1 \quad 2 \le i \le n \\ (-1)^{i+1} & j = i+1 \quad 1 \le i \le n-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

א.כתוב את המטריצות המתאימות עבור n=1,2,3,4,5,6.
ב.מצא קשר בין det(An) ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך וכתוב נוסחת נסיגה עבור det(An).
ג.מצא את det(An) כפונקציה מפורשת של n.
ד. פתור את המשואה Av=0.

<u>שאלה 4 (10 נקודות)</u>

נתונה מערכת המשוואות :

$$\left\{\begin{array}{llll} (1+i)x & +(2+i)y & +(3+i)z & =1+i \\ (4+i)x & +(2+2i)y & & =4 \\ (6+i)x & +(2-2i)y & & =3 \end{array}\right\}$$

מעל שדה המרוכבים.

א. חשב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את רכיב y של הפתרון של המערכת.

<u>שאלה 5 (10 נקודות)</u>

א. חשב את $\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^{100}}{(\sqrt{3}-i)^{100}}$

.

ב. מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקימות את המשואה :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

שאלה 6 (10 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר 3x3 ונתון כי $a_{1,1}=1, a_{1,2}=2, a_{1,3}=3$
ונתון

$$A^{*}=\begin{pmatrix} x & -2 & -1 \\ y & 2 & -1 \\ z & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

מצא את איברי A. A^* כוללת סימנים אך איננה כוללת שחלוף (כלומר חסר התהליך של A^T).

שאלה 7 (10 נקודות)

נתונה המטריצה A :

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

ונתונה המטריצה B :

$$B=\begin{pmatrix} a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & a_{4,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & a_{4,2} \\ a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & a_{4,1} \end{pmatrix}$$

וידוע כי $det(A)=999$ מצא את $3det(2B)$ כאשר ב $2B$ נכפלים כל איברי B ב2.

<u>חלק ב</u>

בחלק זה ארבע שאלות בנות 5 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה ולתת נמוק קצר לתשובתך. הנמוק יכתב בשאלון . כל השאלות הן שאלות חובה. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית.

שאלה 8 (5 נקודות)

לכל מטריצה רבועית A, המטריצה הצמודה לה A^* היא הפיכה.

נכון   לא נכון

נמוק קצר

שאלה 9 (5 נקודות)

נתון כי A הפיכה אז גם A^T הפיכה .

נכון   לא נכון

נמוק קצר

שאלה 10 (5 נקודות)

נתונה מטריצה רבועית A nxn שאינה הפיכה אז כל מינור של A היא מטריצה שאיננה הפיכה.

נכון   לא נכון

נמוק קצר

שאלה 11 (5 נקודות)

נתונה מערכת משוואות $Av=b$ כך ש $b=0$ וכך שאחרי תהליך גאוס יש פחות משוואות מנעלמים . אז יתכן שמספר הפתרונות יהיה סופי.

נכון

לא נכון

נמוק קצר

חלק ג

שאלה 12 (20 נקודות)

הוכח כי אם מטריצה רבועית A היא הפיכה אז הדטרמיננטה שלה שונה מ-0.

מותר להשתמש בטענות עזר שהוכחנו בכתה, בתנאי שתנסח אותן במדויק בנפרד מההוכחה.

פתרונות

תשובה 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_1 \to S_3]{S_2-3S_1 \to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3+S_2 \to S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3S_3 \to S_3]{3S_2 \to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_2-3S_3 \to S_2]{S_1-3S_3 \to S_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_1-2S_2 \to S_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

ואכן $A^{-1}A=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&1&5\\6&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&-3&-4\\2&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ו נוכל לפתר את המערכת :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&1&5\\6&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$$

תשובה 2

$$\begin{pmatrix}1&2b+1&6&b-3\\2&15&5b-1&b-2\\3&22&20&1\end{pmatrix}\xrightarrow{S_3\leftrightarrow S_1}\begin{pmatrix}3&22&20&1\\2&15&5b-1&b-2\\1&2b+1&6&b-3\end{pmatrix}\xrightarrow[3S_2-2S_3\to S_2]{3S_3-S_1\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix}3&22&20&1\\0&1&15b-43&3b-8\\0&6b-19&-2&3b-10\end{pmatrix}\xrightarrow{S_3-(6b-19)S_2\to S_3}\begin{pmatrix}3&22&20&1\\0&1&15b-43&3b-8\\0&0&A&B\end{pmatrix}.$$

$$A=-2-(15b-43)(6b-19)=-2-90b^2+285b+258b-817=$$

$$=-(90b^2-543b+819)=-3(30b^2-181b+273)=-3(b-3)(30b-91)$$

$$B=(3b-10)-(3b-8)(6b-19)=3b-10-18b^2+57b+48b-152=$$

$$=-18b^2+108b-162=-18(b^2-6b+9)=-18(b-3)^2$$

עבור b=3 למערכת יש אינסוף פתרונות. b=91/30 אין פתרון עבור כל b אחר למערכת יש פתרון יחיד.

תשובה 3

לכתוב את הנכון ואת זה להעתיק

$$A_6=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נשים לב כי $\det(A_n)=-\det(A_{n-2})$ וכי $\det(A_1)=0, \det(A_2)=-1$ ולכן נקבל

$$\det(A_n)=\begin{cases} 0 & n=2k-1 \\ (-1)^k & n=2k \end{cases}$$

ה. עבור n זוגי הפתרון היחיד הוא וקטור ה-0. עבור n אי זוגי הפתרון הוא וקטור מהצורה

$$(x,0,x,0,\cdots,0,x)$$

.

תשובה 4

א. נפתח את הדטרמיננט לפי עמודה ימנית ונקבל:

$$\det(A) = (3+i)[(4+i)(2-2i)-(2+2i)(6+i)] =$$
$$= (3+i)[(8-6i+2)-(12+14i-2)] = -(3+i)20i.$$

ב. נציב את וקטור האיברים החפשיים בעמודה השמאלית, נקבל את המטריצה Ay,
ושוב נחשב את הדטרמיננט שלה לפי העמודה הימנית ושוב נקבל :

$$\det(A_y) = (3+i)[3(4+i)-4(6+i)] =$$
$$= (3+i)(-12-i).$$ ולכן :

$$x = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{(3+i)(-12-i).}{-(3+i)20i.} = \frac{1-12i}{20}.$$

כדרוש.

תשובה 5 א

$$\frac{(1+\sqrt{3}i)^{100}}{(\sqrt{3}-i)^{100}} = ?, \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i} =$$

$$\frac{(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = \frac{\sqrt{3}+i+3i-\sqrt{3}}{3+1} = \frac{4i}{4} = i$$

ולכן

$$\frac{(1+\sqrt{3}i)^{100}}{(\sqrt{3}-i)^{100}}=i^{100}=(i^4)^{25}=1^{25}=1$$

סעיף ב

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&5&6\\0&8&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&d\\b&e\\c&f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b+3c&d+2e+3f\\5b+6c&5e+6f\\8b+10c&8e+10f\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&d\\b&e\\c&f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a&2a+4d\\2b&2b+4e\\2c&2c+4f\end{pmatrix}$$

מהשוואת המטריצות נקבל 6 משוואות עם 6 נעלמים.

מהמקומות $(1,1),(2,1),(3,1)$ נקבל את 3 המשוואות :

$$a+2b+3c=2a\rightarrow 2b+3c=a$$

$$5b+6c=2b\rightarrow 3b+6c=0$$

$$8b+10c=2c\rightarrow 8b+8c=0$$

ולכן b=c=a=0. מהמקומות (2,2),(3,2) ומהצבת b=c=0 נקבל את 2 המשוואות :

$$d+2e+3f=2a+4d\rightarrow 3d=2e+3f$$
$$5e+6f=2b+4e\rightarrow e+6f=0$$
$$8e+10f=2c+4f\rightarrow 8e+6f=0$$

ופתרונן הוא d=e=f=0. לכן הפתרון היחיד הוא מטריצת ה-אפס.

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

תשובה 6

נסמן

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\a&b&c\\x&y&z\end{pmatrix}$$

נשתמש בנתונים ונקבל משוואות

$$c-3a=1\to c=3a+1$$

$$b-2a=1\to b=2a+1$$

$$z-3x=2\to z=3x+2$$

$$y-2x=1\to y=2x+1$$

$$ay-bx=-1\to$$

$$a(2x+1)-(2a+1)x=a-x=-1$$

$$az-cx=2\to$$

$$a(3x+2)-x(3a+1)=2a-x=2$$

נחסר את שתי המשוואות האחרונות ונקבל את a ואז נציב ונקבל

$$a=3,x=4,b=7,c=10,y=9,z=14$$

כדרוש.

תשובה 7

נתון כי
$$B=\begin{pmatrix} a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & a_{4,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & a_{4,2} \\ a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & a_{4,1} \end{pmatrix}$$

ולכן

$$B^T=\begin{pmatrix} a_{1,4} & a_{1,3} & a_{1,2} & a_{1,1} \\ a_{2,4} & a_{2,3} & a_{2,2} & a_{2,1} \\ a_{3,4} & a_{3,3} & a_{3,2} & a_{3,1} \\ a_{4,4} & a_{4,3} & a_{4,2} & a_{4,1} \end{pmatrix}$$

אם נחליף עמודות את הראשונה ברביעית וגם את השניה בשלישית נקבל את A, החלפת עמודות כופלת דטרמיננט ב -1, ולכן $\det(B)=\det(B^T)=\det(A)$.

תשובה 8

התשובה לא נכון אם $\det(A)=0$ נציב בשויון $A(A^*)^T=\det(A)I$ ונקבל כי $A(A^*)^T=\det(A)I=0$ ולכן גם A וגם $(A^*)^T$ הן לא הפיכות ולכן גם A^{*T} אינה הפיכה.

תשובה 9

כן כי $\det(A^T)=\det(A)\neq 0$, ולכן גם A^T הפיכה.

תשובה 10

לא, מספיקה דוגמא נגדית למשל המטריצה $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ אז המינור במקום (2,1) הוא המטריצה 1 שהיא הפיכה.

תשובה 11

התשובה נכון : העובדה שיש פרמטרים כלומר משתנים חפשיים מאפשרת לבחור את הערכים חפשי מהשדה, אבל אם השדה הוא סופי אז יש מספר סופי של פררונות.