מבחן סופי באלגברה לינארית א למדעי המחשב

סמסטר קיץ התשע״ו מועד א

יום ה ב מרחשוון התשע״ז 3-11-2016

- מורה : גיורא דולה, מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלוש שעות.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות תכתבנה במחברות.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .
- עליך לענות על 11 שאלות ב-4 חלקים.
- בחלק הראשון 7 שאלות במשקל של 10 נקודות כל אחת. עליך לבחור 6 מתוך 7 שאלות סה״כ 60 נקודות בחלק הראשון.
- בחלק השני 4 שאלות במשקל של 5 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לסמן במעגל את האופציה הנכונה, ולהוסיף נמוק קצר. הסימון והנמוק יהיו בשאלון. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית. סה״כ 20 נקודות בחלק השני.
- בחלק השלישי שאלת נסוח והוכחה אחת בת משקל של 20 נקודות
- $60+20+20=100$

בהצלחה.

חלק א- שאלות 1-7 ועליך לבחור מתוכן ולענות על 6. משקל כל שאלה 10 נקודות.

שאלה 1 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & =1 \\ 4x & -2y & -z & =4 \\ 3x & -6y & +z & =-3 \end{cases}$$

מעל השדה מודולו שבע Z_7.

א. חשב את המטריצה ההפוכה של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את הפתרון של המערכת.

שאלה 2 (10 נקודות)
נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x & +by & +3z & =3b \\ 2x & +(3b-3)y & +4z & =4b+1 \\ 3x & +5y & +(3b+1)z & =15 \end{cases}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד.

שאלה 3 (10 נקודות)

נתונה A_n מטריצה רבועית nxn המוגדרת על ידי

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & j=i \quad 1 \le i \le n \\ -1 & j=i+1 \quad 1 \le i \le n-1 \\ -1 & j=i-1 \quad 2 \le i \le n \\ 0 & otherwisw \end{cases}$$

א.כתוב את המטריצות המתאימות עבור n=1,2,3,4,5,6.
ב.מצא קשר בין det(An) ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך וכתוב נוסחת נסיגה עבור det(An).
ג.מצא את det(An) כפונקציה מפורשת של n.
ד. פתור את המשוואה Av=0.

<u>שאלה 4 (10 נקודות)</u>

נתונה מערכת המשוואות :

$$\begin{cases} (1+i)x & +(2+i)y & +(3+i)z & =1+i \\ (4+i)x & & +(2+2i)z & =4 \\ (6+i)x & & +(2-2i)z & =3 \end{cases}$$

מעל שדה המרוכבים.

א. חשב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את רכיב z של הפתרון של המערכת.

<u>שאלה 5 (10 נקודות)</u>

א. חשב את

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{30}}{(1+i)^{20}}$$

ב. מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקימות את המשואה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

שאלה 6 (10 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר 3x3 ונתון כי $a_{1,1}=1, a_{1,2}=-1, a_{1,3}=1$
ונתון

$$A^{*}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & * \\ 3 & 2 & * \\ -2 & -1 & * \end{pmatrix}$$

מצא את איברי A. A^* כוללת סימנים אך איננה כוללת שחלוף (כלומר חסר התהליך של A^T).

שאלה 7 (10 נקודות)

נתונה המטריצה A :

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

ונתונה המטריצה B :

$$B=\begin{pmatrix} a_{4,4} & a_{4,3} & a_{4,2} & a_{4,1} \\ a_{3,4} & a_{3,3} & a_{3,2} & a_{3,1} \\ a_{2,4} & a_{2,3} & a_{2,2} & a_{2,1} \\ a_{1,4} & a_{1,3} & a_{1,2} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

וידוע כי det(A)=999 מצא את 3det(2B) כאשר ב 2B נכפלים כל איברי B ב2.

<u>חלק ב</u>

בחלק זה ארבע שאלות בנות 5 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה ולתת נמוק קצר לתשובתך. הנמוק יכתב בשאלון . כל השאלות הן שאלות חובה. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית.

שאלה 8 (5 נקודות)

ישנן מטריצות רבועיות השונות מ-0 B,A וכדשמכפלתן היא מטריצת ה-0.

נכון לא נכון

נמוק קצר

שאלה 9 (5 נקודות)

נתון כי A הפיכה אז גם A^2 הפיכה .

נכון לא נכון

נמוק קצר

שאלה 10 (5 נקודות)

נתונה מטריצה רבועית A nxn השונה ממטריצת ה-0 אז גם A^2 איננה מטריצת ה-0

נכון לא נכון

נמוק קצר

שאלה 11 (5 נקודות)

נתונה מערכת משוואות $Av=b$ כך ש $b=0$ וכך שאחרי תהליך גאוס יש פחות משוואות מנעלמים . אז יתכן שמספר הפתרונות יהיה סופי.

נכון   לא נכון

נמוק קצר

חלק ג

שאלה 12 (20 נקודות)

הוכח את משפט 5 הנקודות.

מותר להשתמש בטענות עזר שהוכחנו בכתה, בתנאי שתנסח אותן במדויק בנפרד מההוכחה.

פתרונות

תשובה 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2+S_3\to S_2]{S_1-3S_3\to S_1} \begin{pmatrix} -8 & -1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 7 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2+S_3\to S_3]{S_1-S_2\to S_1} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-S_1+2S_3\to S_3} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[4S_3\to S_3]{6S_1\to S_1,6S_2\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

ואכן $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו נוכל לפתור את המערכת :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

תשובה 2

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 3 & 3b \\ 2 & 3b-3 & 4 & 4b+1 \\ 3 & 5 & 3b+1 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2-2S_1\to S_2]{S_3-3S_1\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & b & 3 & 3b \\ 0 & b-3 & -2 & -2b+1 \\ 0 & 5-3b & 3b-8 & 15-9b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2S_3+(3b-8)S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & b & 3 & 3b \\ 0 & b-3 & -2 & -2b+1 \\ 0 & A & 0 & B \end{pmatrix}.$$

$$A=(b-3)(3b-8)+2(5-3b)=3b^2-17b+24+10-6b=$$

$$=3b^2-23b+34=(b-2)(3b-17), B=(1-2b)(3b-8)+2(15-9b)=$$

$$=-6b^2+19b-8+30-18b=-(6b^2-b-22)=3(b-2)(6b-11)$$

עבור b=2 למערכת יש אינסוף פתרונות. b=17/3 אין פתרון עבור כל b אחר למערכת יש פתרון יחיד.

תשובה 3

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

נשים לב כי

$$\det(A_{n+1}) = \det(A_n) - \det(A_{n-1}) = (\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2})) - \det(A_{n-1}) = -\det(A_{n-2}), \det(A_1) = 1, \det(A_2) = 0, \det(A_3) = -1$$

ולכן נקבל

$$\det(A_n) = \begin{cases} 0 & n = 3k+2 \\ (-1)^k & n = 3k \\ (-1)^k & n = 3k+1 \end{cases}$$

ה. עבור $n \neq 2(\bmod 3)$ הפתרון היחיד הוא וקטור ה-0. עבור $n = 2(\bmod 3)$ הפתרון הוא וקטור מהצורה $x(1,1,0,-1,-1,0,1,1,0,\cdots)$

.

תשובה 4

א. נפתח את הדטרמיננט לפי עמודה אמצעית ונקבל:

$$\det(A) = -(2+i)[(4+i)(2-2i)-(2+2i)(6+i)] =$$
$$= -(2+i)[(8-6i+2)-(12+14i-2)] = (2+i)20i.$$

ב. נציב את וקטור האיברים החפשיים בעמודה השמאלית, נקבל את המטריצה Ay,
ושוב נחשב את הדטרמיננט שלה לפי העמודה הימנית ושוב נקבל :

$$\det(A_z) = -(2+i)[3(4+i)-4(6+i)] =$$
$$= -(2+i)(-12-i) = (2+i)(12+i).$$ ולכן :

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{(2+i)(12+i).}{(2+i)20i.} = \frac{1-12i}{20}.$$

כדרוש.

תשובה 5 א

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{30}}{(1+i)^{20}} = [\frac{(\sqrt{3}+i)^3}{(1+i)^2}]^{10} =$$

$$= [\frac{3\sqrt{3}+3\cdot 3i-3\sqrt{3}-i}{1+2i-1}]^{10} = [\frac{8i}{2i}]^{10} =$$

$$= 4^{10} = 2^{20} = 1048576$$

סעיף ב

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2b+3c & d+2e+3f \\ 5b+6c & 5e+6f \\ b+4c & e+4f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 2a+4d \\ 2b & 2b+4e \\ 2c & 2c+4f \end{pmatrix}$$

מהשואת המטריצות נקבל 6 משואות עם 6 נעלמים.

מהמקומות $(1,1),(2,1),(3,1)$ נקבל את 3 המשואות :

$$a+2b+3c=2a \rightarrow 2b+3c=a$$
$$5b+6c=2b \rightarrow 3b+6c=0$$
$$b+4c=2c \rightarrow b+2c=0$$
$$\rightarrow b=-2c, a=-4c+3c=-c$$

ולכן נציב ונקבל את 2 המשואות :

$$d+2e+3f=2a+4d\rightarrow 3d=2e+3f$$

$$5e+6f=2b+4e\rightarrow e+6f=2b$$

$$e+4f=2c+4f\rightarrow e=2c\rightarrow 2c+6f=-4c$$

$$\rightarrow f=-c\rightarrow 3d=4c-3c=c$$

לכן הפתרון היחיד הוא המטריצה $d\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -6 & 6\\ 3 & -3\end{pmatrix}$.

תשובה 6

נסמן

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ a & b & c\\ x & y & z\end{pmatrix}$$

נשתמש בנתונים ונקבל משוואות

$$-c-b=-2\rightarrow b=2-c$$

$$c-a=1\rightarrow a=c-1$$

$$-z-y=-3\rightarrow y=3-z$$

$$z-x=2\rightarrow x=z-2$$

$$bz-cy=1\rightarrow$$

$$(2-c)z-c(3-z)=2z-3c=1$$

$$az-cx=1\rightarrow$$

$$(c-1)z-c(z-2)=2c-z=1$$

נחסר את שתי המשוואות האחרונות ונקבל את a ואז נציב ונקבל

$$c=3,z=5,x=3,y=-2,a=2,b=-1$$

כדרוש.

תשובה 7

נתון כי ונתונה המטריצה B :

$$B=\begin{pmatrix} a_{4,4} & a_{4,3} & a_{4,2} & a_{4,1} \\ a_{3,4} & a_{3,3} & a_{3,2} & a_{3,1} \\ a_{2,4} & a_{2,3} & a_{2,2} & a_{2,1} \\ a_{1,4} & a_{1,3} & a_{1,2} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

וידוע כי det(A)=999 מצא את 3det(2B) כאשר ב 2B נכפלים כל איברי B ב2.

ולכן

$$B^T=\begin{pmatrix} a_{4,4} & a_{3,4} & a_{2,4} & a_{1,4} \\ a_{4,3} & a_{3,3} & a_{2,3} & a_{1,3} \\ a_{4,2} & a_{3,2} & a_{2,2} & a_{1,2} \\ a_{4,1} & a_{3,1} & a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

אם נחליף עמודות את הראשונה ברביעית וגם את השניה בשלישית ואח״כ נבצע את אותה פעולה בעמודות נקבל את A, החלפת עמודות כופלת דטרמיננט ב 1-, ולכן det(B=det(A). ולכן 3det(2B)=48 det(B)

תשובה 8

התשובה כן נכון ומצורפת דוגמא $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

תשובה 9

כן כי הפוכתה היא A^{-2} .

תשובה 10

לא, מספיקה דוגמא נגדית למשל המטריצה $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

תשובה 11

התשובה נכון : העובדה שיש פרמטרים כלומר משתנים חפשיים מאפשרת לבחור את הערכים חפשי מהשדה, אבל אם השדה הוא סופי אז יש מספר סופי של פתרונות.