מבחן סוף באלגברה לינארית א למדעי המחשב

סמסטר קיץ התשע״ז מועד א

יום ד ה מרחשוון התשע״ח 25-10-2017

- מורה : גיורא דולה, מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלוש שעות.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות תכתבנה במחברות.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .
- עליך לענות על 11 שאלות ב-4 חלקים.
- בחלק הראשון 7 שאלות במשקל של 10 נקודות כל אחת. עליך לבחור 6 מתוך 7 שאלות סה״כ 60 נקודות בחלק הראשון.
- בחלק השני 4 שאלות במשקל של 5 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לסמן במעגל את האופציה הנכונה, ולהוסיף נמוק קצר. הסימון והנמוק יהיו בשאלון. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית. סה״כ 20 נקודות בחלק השני.
- בחלק השלישי שאלת נסוח והוכחה אחת בת משקל של 20 נקודות
- 60+20+20=100

בהצלחה.

חלק א- שאלות 1-7 ועליך לבחור מתוכן ולענות על 6. משקל כל שאלה 10 נקודות.

שאלה 1 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 3x & +2y & +3z & =1 \\ 4x & -2y & -z & =4 \\ 3x & -6y & +z & =-3 \end{cases}$$

מעל השדה מודולו שבע Z_7.

א. חשב את המטריצה ההפוכה של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את הפתרון של המערכת.

שאלה 2 (10 נקודות)
נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 2x & +(b-1)y & +3z & =3b \\ 2x & +(2b-2)y & +4z & =4b \\ 4x & +3y & +(3b+1)z & =14 \end{cases}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד.

שאלה 3 (10 נקודות)

נתונה A_n מטריצה רבועית nxn המוגדרת על ידי

$$A_{i,j} = \begin{cases} 2 & j=i \quad 1 \le i \le n \\ 4 & j=i+1 \quad 1 \le i \le n-1 \\ 1 & j=i-1 \quad 2 \le i \le n \\ 0 & otherwisw \end{cases}$$

א.כתוב את המטריצות המתאימות עבור n=1,2,3,4,5,6.
ב.מצא קשר בין det(An) ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך וכתוב נוסחת נסיגה עבור det(An).
ג.מצא את det(An) כפונקציה מפורשת של n.
ד. פתור את המשוואה Av=0.

שאלה 4 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות :

$$\begin{cases} (1+i)x & +(2+i)y & +(2+i)z & =1+i \\ (4+i)x & & +(3+2i)z & =4 \\ (6+i)x & & +(2-2i)z & =3 \end{cases}$$

מעל שדה המרוכבים.

א. חשב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את רכיב z של הפתרון של המערכת.

<u>שאלה 5 (10 נקודות)</u>

א. חשב את $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{30}}{(1+i\sqrt{3})^{20}}$

ב. מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקימות את המשואה :

$$A\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

שאלה 6 (10 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר 3x3 ונתון כי $a_{3,1}=1, a_{3,2}=2, a_{3,3}=3$ וכי

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -6 & 12 & -6 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

מצא את כל המטריצות האפשריות A. . המקיימות את הנתונים

שאלה 7 (10 נקודות).

חשב את הדטרמיננטה של המטריצה A המוגדרת להלן :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b^2 & c & d^2 \\ a^2 & b^4 & c^2 & d^4 \\ a^3 & b^6 & c^3 & d^6 \end{pmatrix}$$

חלק ב

בחלק זה ארבע שאלות בנות 5 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה ולתת נמוק קצר לתשובתך. הנמוק יכתב בשאלון . כל השאלות הן שאלות חובה. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית.

שאלה 8 (5 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר $2n\times 2n$ ונתון כי סכום העמודות הזוגיות שווה לסכום העמודות האיזזוגיות . אז $\det(A)=0$

נכון | לא נכון

נמוק קצר

שאלה 9 (5 נקודות)

נתונות מטריצות A,B מסדר $n\times n$. אז $\det(A^2+B^2)>0$

.

נכון | לא נכון

נמוק קצר

שאלה 10 (5 נקודות)

נתונות מטריצות A,B מסדר $n\times n$. אז $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$

נכון

לא נכון

נמוק קצר

שאלה 11 (5 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר $n\times n$. אז $adj(A^T)=[adj(A)]^T$

נכון

לא נכון

נמוק קצר

חלק ג

שאלה 12 (20 נקודות)

הוכח כי עבור n ראשוני $\mathbb{Z}_n$ הוא שדה.

מותר להשתמש בטענות עזר שהוכחנו בכתה, בתנאי שתנסח אותן במדויק בנפרד מההוכחה.

פתרונות

תשובה 1

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2+S_3 \to S_2]{S_1-3S_3 \to S_1} \begin{pmatrix} -6 & -1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 7 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2+S_3 \to S_3]{S_1-S_2 \to S_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1+2S_3 \to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[4S_3 \to S_3]{6S_2 \to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

ואכן $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו נוכל לפתר את המערכת :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

תשובה 2

$$\begin{pmatrix} 2 & b-1 & 3 & 3b \\ 2 & 2b-2 & 4 & 4b \\ 4 & 3 & 3b+1 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2-S_1\to S_2]{S_3-2S_1\to S_3} \begin{pmatrix} 2 & b-1 & 3 & 3b \\ 0 & b-1 & 1 & b \\ 0 & 5-2b & 3b-5 & 14-6b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_3-(3b-5)S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 2 & b-1 & 3 & 3b \\ 0 & b-1 & 1 & b \\ 0 & A & 0 & B \end{pmatrix}.$$

$$A = 5-2b-(b-1)(3b-5) = 5-2b-3b^2+5b+3b-5 =$$
$$= -3b^2+6b = 3b(2-b), B = -b(3b-5)+(14-6b) =$$
$$= -3b^2+5b+14-6b = -3b^2-b+14 = -(b-2)(3b+7)$$

עבור b=2 למערכת יש אינסוף פתרונות. b=0 אין פתרון עבור כל b אחר למערכת יש פתרון יחיד.

תשובה 3

$$A_6=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

נשים לב כי

$$\det(A_{n+1})=2\det(A_n)-4\det(A_{n-1})=2(2\det(A_{n-1})-4\det(A_{n-2}))$$
$$-4\det(A_{n-1})=-8\det(A_{n-2}),\det(A_1)=2,\det(A_2)=0,\det(A_3)=-8$$

ולכן נקבל

$$\det(A_n)=\begin{cases} 0 & n=3k+2 \\ (-8)^k & n=3k \\ 2(-8)^k & n=3k+1 \end{cases}$$

ה. עבור $n\neq 2(\bmod 3)$ הפתרון היחיד הוא וקטור ה-0. עבור $n=2(\bmod 3)$ הפתרון הוא וקטור מהצורה

$$(8^k,-4\cdot 8^{k-1},0,8^{k-1},-4\cdot 8^{k-2},0,8^{k-2},-4\cdot 8^{k-3},0,\cdots)$$

.

תשובה 4

א. נפתח את הדטרמיננט לפי עמודה אמצעית ונקבל:

$$\det(A)=-(2+i)[(2-2i)(4+i)-(3+2i)(6+i)]=$$
$$=-(2+i)[(10-6i)-(16+15i)]=(2+i)(6+21i).$$

ב. נציב את וקטור האיברים החפשיים בעמודה השמאלית, נקבל את המטריצה Ay,
ושוב נחשב את הדטרמיננט שלה לפי העמודה הימנית ושוב נקבל :

$$\det(A_z)=-(2+i)[3(4+i)-4(6+i)]=$$
$$=-(2+i)(-12-i)=(2+i)(12+i).$$ ולכן :

$$z=\frac{\det(A_z)}{\det(A)}=\frac{(2+i)(12+i).}{(2+i)(6+21i).}=\frac{12+i}{6+21i}=$$
$$=\frac{(12+i)(6-21i)}{36+441}=\frac{72+21+6i-252i}{477}=$$
$$=\frac{93-246i}{477}.$$

כדרוש.

תשובה 5 א

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{30}}{(1+i\sqrt{3})^{20}}=[\frac{(\sqrt{3}+i)^{3}}{(1+\sqrt{3}i)^{2}}]^{10}=$$

$$=[\frac{3\sqrt{3}+3\cdot 3i-3\sqrt{3}-i}{1+2\sqrt{3}i-3}]^{10}=$$

$$=[\frac{8i}{2(\sqrt{3}i-1)}]^{10}=[\frac{4i}{(\sqrt{3}i-1)}]^{10}=$$

$$=[\frac{4i(-\sqrt{3}i-1)}{(\sqrt{3}i-1)(-\sqrt{3}i-1)}]^{10}=[i(-\sqrt{3}i-1)]^{10}=$$

$$=-[2cis(210)]^{10}=-2^{10}cis(180+30)^{10}=$$

$$=-2^{10}cis(1800+300)=-2^{10}cis(300)=$$

$$=2^{10}cis(120)=2^{9}(-\sqrt{3}+i)$$

סעיף ב

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b+3c & d+2e+3f \\ 2b+6c & 2e+6f \\ b+2c & e+2f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2a+4d \\ 2b & 2b+4e \\ 2c & 2c+4f \end{pmatrix}$$

מהשואת המטריצות נקבל 6 משואות עם 6 נעלמים.

מהמקומות $(1,1),(2,1),(3,1)$ נקבל את 3 המשואות :

$$a+2b+3c=2a \rightarrow 2b+3c=a$$
$$2b+6c=2b \rightarrow 6c=0 \rightarrow c=0$$
$$b+2c=2c \rightarrow b=0$$
$$\rightarrow a+2b+2c=a=-2a, \rightarrow a=0$$

ולכן נציב ונקבל :

$$d+2e+3f=2a+4d=4d\rightarrow 3d=2e+3f$$

$$2e+6f=2b+4e=4e\rightarrow 2e=6f\rightarrow e=3f$$

$$e+2f=2c+4f=4f\rightarrow e=2f$$

$$\rightarrow 3f=2f\rightarrow f=0\rightarrow e=0\rightarrow d=0$$

לכן הפתרון היחיד הוא המטריצה $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

תשובה 6

נסמן

$$A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ x & y & z\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

נשתמש בנתונים ונקבל משוואות

$$3a-c=12\to c=3a-12$$

$$2a-b=6\to b=2a-6$$

$$3x-z=6\to z=3x-6$$

$$2x-y=3\to y=2x-3$$

$$bz-cy=3\to$$

$$(2a-6)(3x-6)-(3a-12)(2x-3)=$$

$$=-12a-18x+36-(-9a-24x+36)$$

$$=6x-3a=3\to 2x-a=1\to a=2x-1$$

ונקבל

$$A=\begin{pmatrix} 2x-1 & 4x-8 & 6x-15 \\ x & 2x-3 & 3x-6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

תשובה 7

נתונה המטריצה A ונפעל עליה פעולות יסודיות

$$\det\begin{pmatrix}1&1&1&1\\a&b^2&c&d^2\\a^2&b^4&c^2&d^4\\a^3&b^6&c^3&d^6\end{pmatrix}\xrightarrow[S_4-a^3S_1\to S_4]{S_2-aS_1\to S_2,S_3-a^2S_1\to S_3}\det\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&b^2-a&c-a&d^2-a\\0&b^4-a^2&c^2-a^2&d^4-a^2\\0&b^6-a^3&c^3-a^3&d^6-a^3\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}b^2-a&c-a&d^2-a\\b^4-a^2&c^2-a^2&d^4-a^2\\b^6-a^3&c^3-a^3&d^6-a^3\end{pmatrix}$$

$$=(b^2-a)(c-a)(d^2-a)\det\begin{pmatrix}1&1&1\\b^2+a&c+a&d^2+a\\b^4+ab^2+a^2&c^2+ac+a^2&d^4+ad^2+a^2\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3-c_1\to c_3]{c_2-c_1\to c_2}$$

$$=(b^2-a)(c-a)(d^2-a)\det\begin{pmatrix}1&0&0\\b^2+a&c-b^2&d^2-b^2\\b^4+ab^2+a^2&c^2+ac-ab^2-b^4&d^4+ad^2-ab^2-b^4\end{pmatrix}=$$

$$=(b^2-a)(c-a)(d^2-a)(c-b^2)(d^2-b^2)\det\begin{pmatrix}1&1\\a+b^2+c&a+b^2+d^2\end{pmatrix}=$$

$$=(b^2-a)(c-a)(d^2-a)(c-b^2)(d^2-b^2)(d^2-c)$$

תשובה 8

נכון. נובע כי מטריצה A מסדר $c_1+c_3+\cdots+c_{2n-1}=c_2+c_4+\cdots+c_{2n}$. אז $c_1-c_3-\cdots-c_{2n-1}-c_2-c_4-\cdots-c_{2n}$ היא פעולה אשר שומרת על הדטרמיננט של Aויוצרת עמודת 0, ולכן הדטרמיננט של המטריצה החדשה, וגם של המקורית הוא 0.

תשובה 9

לא נכון דוגמא נגדית

אז $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\to A^2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},B^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\to A^2+B^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\to\det(A^2+B^2)=0$

תשובה 10

לא נכון דוגמא נגדית $A=B=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\to A+B=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}, \det(A+B)=16\neq\det(A)+\det(B)=8$

תשובה 11

נכון לכל $i,j,1\le i,j\le n$ מתקיים

$[adj(A^T)]_{i,j}=(-1)^{i+j}\det(Z_{i,j}(A^T))=(-1)^{j+i}\det(Z_{j,i}(A))=adj(A)_{j,i}=[adj(A)]^T{}_{i,j}$ כדרוש.