NETANYA ACADEMIC COLLEGE
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

המכללה האקדמית נתניה
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

מבחן סוף באלגברה לינארית א למדעי המחשב-סמסטר סתו.

יום ג, ו אדר א התשס"ח, 12-2-2008 שעה 9.00

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שעתים וחצי.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות תכתנה במחברות.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 102 .
- במבחן 15 שאלות ב-4 חלקים.
- בחלק הראשון 10 שאלות במשקל של 7 נקודות כל אחד. ענה על 9 שאלות בלבד. אם תענינה יותר מ-9 שאלות תבחרנה 9 השאלות הראשונות. סה"כ 63 נקודות בחלק הראשון.
- בחלק השני שאלה אחת בת משקל של 7 נקודות.
- בחלק השלישי 3 שאלות במשקל של 4 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לסמן במעגל את האופציה הנכונה. סה"כ 12 נקודות בחלק השלישי.
- בחלק הרביעי שאלת נסוח והוכחה אחת בת משקל של 20 נקודות.

$63+7+12+20=102$

- נקוד חלקי לפי הכתוב במחברת.

בהצלחה.

Fax: (972-9) 8607711 :פקס Tel: (972-9) 8607777 :טל

חלק א- שאלות 1-10 מהן יש לבחור 9 שאלות. משקל כל שאלה 7 נקודות.

שאלה 1(7 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +2y & +bz & =b+3 \\ 2x & +(b-1)y & +4z & =2b+1 \\ 4x & +7y & +3bz & =6b-1 \end{array}\right\}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד.

שאלה 2(7 נקודות)

. הצג את המספר המרוכב $\frac{(1+i)^{200}}{(\sqrt{3}-i)^{100}}$ בצורה קרטזית.

שאלה 3(7 נקודות)

נתונה המטריצה הבאה שרכיביה שיכים לשדה Z_7.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 4 & 6 & 3\\ 2 & 5 & 4\end{pmatrix}$$

חשב את A^{-1} .

<u>4(7 נקודות)</u>

מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקימות את המשואה: מספיק למצוא את המשואות שמקימים איברי A. אין צורך לפתור.

$$A^T A=I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

<u>שאלה 5(7 נקודות)</u>

נתונה מטריצה A מסדר 4x4 אשר מוגדרת על ידי הנוסחה: $A_{i,j}=ij+1$ עבור 1□i,j□4.
חשב במחברתך את det(A).

<u>שאלה 6(7 נקודות)</u>

חשב במחברתך את השארית בחלוקה ל-7 של הבטוי: $2^{400}3^{500}5^{300}$. תשובה:

שאלה 7(7 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות

$$A\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

כאשר נמחקו מA ארבעה איברים.

$$\begin{pmatrix} 1 & ? & ? & 0 \\ 0 & ? & ? & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

השלם את האיברים החסרים ב-A.

שאלה 8(7 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר 3x3 ונתון כי:
$a_{1,1}=1, a_{1,2}=2, a_{1,3}=3, a_{2,3}-\ a_{2,2}=1$ ונתונים הדטרמיננטים הבאים של המינורים מ-A
$M_{1,1}=-8,\ M_{1,2}=10,\ M_{1,3}=-3,\ M_{3,1}=-3,\ M_{3,2}=6,\ M_{3,3}=-3$. מצא את כל אברי A.

שאלה 9(7 נקודות)

פתור את המערכת:

$$\begin{cases} (3+i)x+(3-i)y=4 \\ (3-i)x+(3+i)y=4i \end{cases}$$

<u>שאלה 10(7 נקודות)</u>

פתור את המשואות של התשובה בשאלה 4.

<u>חלק ב</u>

בחלק זה שאלה אחת . בת7 נקודות.

<u>שאלה 11(7 נקודות)</u>

פרק את המטריצה A פרוק LU כאשר:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

והשתמש בו כדי לפתור את המערכת :

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}.$$

<u>חלק ג</u>

בחלק זה שלש שאלות בנות 4 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה.

<u>שאלה 12 (4 נקודות)</u>

נתונה מטריצה A מסדר 3x3 בעלת דרגה 2 מעל השדה Z_5. נביט במערכת המשוואות $Av=(0,0,0)^T$. אז למערכת יש אינסוף פתרונות.

תשובה כן לא

תשובה:

<u>שאלה 13 (4 נקודות)</u>

נתונה מטריצה A מעל R שאבריה שלמים. נגדיר את המטריצה $Z_7(A)$ שהיא מעל Z_7, המתקבלת מ-A על ידי זה שלכל מספר שלם ב-A נעבור למחלקת השקילות שלו ב-Z_7.

למשל אם $A=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$, אז $Z_7(A)=\begin{pmatrix}5&6\\0&1\end{pmatrix}$.

אז קימת מטריצה A שדרגתה מעל R גדולה ממש מדרגת $Z_7(A)$ מעל Z_7.

תשובה כן לא

<u>שאלה 14 (4 נקודות)</u>

קימות שתי מטריצות ממשיות שונות מסדר 3x3 שתסומנה A ו-B, כך ש adj(A)=adj(B).

תשובה כן לא

<u>חלק ד-</u> שאלת נסוח והוכחה.

<u>שאלה 15(20 נקודות)</u>

נסח והוכח את המשפט אשר מקשר בין הפיכות של מטריצה ובין הערך של הדטרמיננט שלה. מותר להסתמך על טענות עזר, אבל יש לנסח כל טענה כזו במדויק.

תשובות

תשובה 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b & b+3 \\ 2 & b-1 & 4 & 2b+1 \\ 4 & 7 & 3b & 6b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-4S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b & b+3 \\ 0 & b-5 & 4-2b & -5 \\ 0 & -1 & -b & 2b-13 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3+(b-5)S_2\to S_3]{S_2\leftrightarrow S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b & b+3 \\ 0 & -1 & -b & 2b-13 \\ 0 & 0 & X & Y \end{pmatrix}$$

וכאשר

$$X = -b(b-5)+(4-2b) = -b^2+3b+4 =$$

$$(4-b)(1+b).$$

$$Y = (b-5)(2b-13)-5 = 2b^2-23b+60 =$$

$$= (2b-15)(b-4).$$

ולכן: עבור b=4 למערכת יש רק 2 משוואות, לכן יש לה ∞ פתרונות. עבור b=-1 מתקיים X=0,Y≠0, ולכן אין למערכת פתרון. לכל b אחר למערכת יש פתרון יחיד.

תשובה 2

נעביר כל מספר לצורה קטבית:

$$1+i \to R^2=2, R=\sqrt{2}, \tan(a)=1, a=45^0, \sqrt{3}-i \to S^2=3+1, S=2, \tan(b)=\frac{-1}{\sqrt{3}}, b=-30^0$$

$$\frac{(1+i)^{200}}{(\sqrt{3}-i)^{100}}=\frac{(\sqrt{2}cis(45^0))^{200}}{(2cis(-30^0))^{100}}=\frac{2^{100}cis(45\cdot 200)}{2^{100}cis(-30\cdot 100)}=\frac{cis(45\cdot 8\cdot 25)}{cis(-30\cdot(12\cdot 8+4)}=\frac{cis(360\cdot 25)}{cis(-360\cdot 8-120)}$$

$$=\frac{1}{cis(-120)}=cis(120)=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

(תודה מקרב לב למאיר שמצא את השגיאה)

תשובה 3

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4\\4&6&3\\2&5&4\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc}1&3&4&1&0&0\\4&6&3&0&1&0\\2&5&4&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[S_3-2S_1\to S_3]{S_2-4S_1\to S_2}\left(\begin{array}{cccccc}1&3&4&1&0&0\\0&1&1&3&1&0\\0&6&3&5&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{S_3-6S_2\to S_3}\left(\begin{array}{cccccc}1&3&4&1&0&0\\0&1&1&3&1&0\\0&0&4&1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[S_1-3S_1\to S_2]{2S_3\to S_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc}1&0&1&6&4&0\\0&1&1&3&1&0\\0&0&1&2&2&2\end{array}\right)\xrightarrow[S_1-S_3\to S_1]{S_2-S_3\to S_2}\left(\begin{array}{cccccc}1&0&0&4&2&5\\0&1&0&1&6&5\\0&0&1&2&2&2\end{array}\right)$$

(שוב תודה למאיר) ובאמת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = I$$

תשובה 4 + תשובה 10

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \rightarrow A^T A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1,$$

$$ab + cd = 0$$

נפתור את המערכת:

נסמן:

$$z = a + ci, w = b + di$$

ונחשב הצגות קטביות של z ושל w ונקבל.

$$|z|^2 = a^2 + c^2 = 1, |w|^2 = b^2 + d^2 = 1 \rightarrow |z| = |w| = 1,$$

$$\frac{w}{z} = \frac{b + id}{a + ic} = \frac{(b + id)(a - ic)}{(a + ic)(a - ic)} = \frac{(ab + cd) + (ad - bc)i}{a^2 + c^2} =$$

$$\frac{0 + (ad - bc)i}{1} = (ad - bc)i$$

ולכן:

$$(ad-bc)^2=(ad-bc)^2+0^2=(ad-bc)^2+(ab+cd)^2=$$
$$(ad)^2+(bc)^2+(ab)^2+(bc)^2+2abcd-2abcd=$$
$$=(a^2+c^2)(b^2+d^2)=1$$

ולכן:

$$(ad-bc)=\pm 1, \frac{w}{z}=\pm i$$

ולכן בעצם z קובע את w. אם נסמן z=cis(x) אז w=cis(x±90), כלומר העמודה השמאלית של A היא המספר המרוכב cis(x), והעמודה הימנית היא המספר המרוכב cis(x±90).

לכן נסמן : cis(x)=a+ic=a+i√(1-a²),

מקרה ראשון אז cis(x+90)=cis(x)cis(90)=(a+ic)i=-c+ia ואז המטריצה היא:

$$\begin{pmatrix} a & -\sqrt{1-a^2} \\ \sqrt{1-a^2} & a \end{pmatrix}.$$

מקרה שני אז cis(x-90)=cis(x)cis(-90)=(a+ic)(-i)=c-ia ואז המטריצה היא:

$$\begin{pmatrix} a & \sqrt{1-a^2} \\ \sqrt{1-a^2} & -a \end{pmatrix}$$ כאשר

תשובה 5

נכתב את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 7 & 10 & 13 \\ 5 & 9 & 13 & 17 \end{pmatrix}$$

נפעיל פעולות אלמנטריות אשר שומרות על הדטרמיננט:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 7 & 10 & 13 \\ 5 & 9 & 13 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2+S_3\to S_3]{S_1+S_4\to S_4} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 7 & 12 & 17 & 22 \\ 7 & 12 & 17 & 22 \end{pmatrix}$$

במטריצה האחרונה יש שתי שורות זהות ולכן הדטרמיננט הוא 0.

תשובה 6

$$2^{400}3^{500}5^{300} = (2*3*5)^{300}\,2^{100}3^{200} = 2^{300}6^{100}3^{100} =$$
$$= 8^{100}(18)^{100} = 1^{100}4^{100} = 4^{3*33+1} = (4^3)^{33}4 = 1^{33}4 = 4$$

תשובה 7

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נציב את הנתונים ונקבל ארבע משוואות עם ארבעה נעלמים:

$$\begin{cases} -1+a-b=2 \\ 1-a-b=0 \\ c-d=2 \\ -c-d=0 \end{cases}$$

ופתרונה היחיד הוא a=2,c=1,b=d=-1.

שוב תודה מקרב לב למאיר על תקון שגיאה.

<u>תשובה לשאלה 8</u>

נרשם את המטריצה:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

ואז:

$$-3 = M_{3,1} = 2c - 3b, 6 = M_{3,2} = 3a - c,$$
$$-3 = M_{3,3} = b - 2a$$

קבלנו 3 משואות ב-3 נעלמים:

$$\begin{aligned} 3a - c &= 6 \\ -2a + b &= -3 \\ -3b + 2c &= -3 \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_1+S_2\to S_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2S_1+S_2\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3S_1-S_2\to S_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

נוסיף את הנתון כי c-b=1 ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2+3S_3 \to S_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_2+2S_3 \to S_2]{S_1+S_3 \to S_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \to$$

$$a=4, b=5, c=6$$

נוכל להציב בתבנית המקורית של A (נשים לב להבדלי הסימון) ולקבל תוצאת בינים:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

<u>בשאלה נפלה שגיאה</u>: התנאי שאליו התכוון המשורר הוא $M_{1,2}=-10$ ולא $M_{1,2}=10$. נפתר את המשך התרגיל בשתי דרכים: איך שהתכונתי, ואיך שצריך לפתור אותו לפי הנתונים.

<u>המשך לפי איך שהתכונתי:</u>

יש עוד שלשה מינורים שלא השתמשנו בערכיהם המספריים:

$$-8 = M_{1,1} = 5c - 6b, -10 = M_{1,2} = -6a + 4c,$$
$$-3 = M_{1,3} = 4b - 5a$$

שוב מקבלים 3 משואות עם שלשה נעלמים:

$$\begin{aligned} 6a - 4c &= 10 \\ -5a + 4b &= -3 \\ -6b + 5c &= -8 \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 & 10 \\ -5 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_1+S_2\to S_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 & 7 \\ -5 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 5 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{5S_1+S_2\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & 24 & -20 & 32 \\ 0 & -6 & 5 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & -6 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3S_1+2S_2\to S_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & -6 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & -6 & 5 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 3a - 2c = 5 \\ -6b + 5c = -8 \end{cases} \to$$

$$a = \frac{5+2c}{3}, b = \frac{8+5c}{6}$$

ולכן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ (2c+5)/3 & (5c+8)/6 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5/3 & 8/6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 5/6 & 1 \end{pmatrix}$$

וזהו הפתרון המלא.

<u>המשך לפי איך שכתוב בשאלון:</u>

יש עוד שלשה מינורים שלא השתמשנו בערכיהם המספריים:

$$-8 = M_{1,1} = 5c - 6b, 10 = M_{1,2} = -6a + 4c,$$

$$-3 = M_{1,3} = 4b - 5a$$

שוב מקבלים 3 משוואות עם שלשה נעלמים:

$$\begin{aligned} 6a-4c&=-10\\ -5a+4b&=-3\\ -6b+5c&=-8 \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 & -10\\ -5 & 4 & 0 & -3\\ 0 & -6 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_1+S_2\to S_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 & -13\\ -5 & 4 & 0 & -3\\ 0 & -6 & 5 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{5S_1+S_2\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 & -13\\ 0 & 24 & -20 & -68\\ 0 & -6 & 5 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2+4S_3\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 & -13\\ 0 & 0 & 0 & -100\\ 0 & -6 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

ולכן אין לבעיה פתרון.

תשובה 9

נכתב בצורה מטריציאלית:

$$\begin{pmatrix} 3+i & 3-i & 4\\ 3-i & 3+i & 4i \end{pmatrix}$$

ולכן נוכל לעשות פעולות אלמנטריות ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 3+i & 3-i & 4 \\ 3-i & 3+i & 4i \end{pmatrix} \xrightarrow[S_1-S_2\to S_2]{S_1+S_2\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 4+4i \\ 2i & -2i & 4-4i \end{pmatrix} \xrightarrow[S_1/2\to S_2]{S_1/2\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2+2i \\ i & -i & 2-2i \end{pmatrix} \xrightarrow{iS_1-3S_2\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2+2i \\ 0 & 6i & -8+8i \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{-i}{6}S_2\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2+2i \\ 0 & 1 & \dfrac{4+4i}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1-3S_2\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2-2i \\ 0 & 1 & \dfrac{4+4i}{3} \end{pmatrix} \to$$

$$x=\frac{-2(1+i)}{3}, y=\frac{4(1+i)}{3}$$

.

תשובה 11

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-13S_1\to S_3]{S_2-7S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -12 & -24 \\ 0 & -24 & -48 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_3-2S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -12 & -24 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 13 & 2 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -12 & -24 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

וקל לראות כי LU=A.

כעת במערכת

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = LU\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

L היא מטריצה הפיכה ואפשר לפתור אותה בהצבה ולקבל:

$$U\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = L^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן מקבלים מערכת של 2 משוואות עם שלשה נעלמים.

$$U\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -12 & -24 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אותה נפתר בצורה רגילה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -12 & -24 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2/(-12) \to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1 - 3S_2 \to S_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to x = z - 1, y = 1 - 2z$$

ולכן:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-1 \\ 1-2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

וקל לראות שזהו אכן הפתרון.

תשובה 12

לא נכון. אמנם הפתרון תלוי במשתנה חפשי (פרמטר), אבל הערכים של הפרמטר יכולים לקבל כל ערך בשדה, ויש כאלו רק 5 ערכים.

תשובה 13

כן, למשל עבור $A=\begin{pmatrix}7 & 7\\ 0 & 7\end{pmatrix}$ מתקיים כי det(A)=42 ולכן A הפיכה, אבל

$Z_7(A)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ שאינה הפיכה.

תשובה 14

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}\rightarrow$$

כן למשל

$$adj(A)=adj(B)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$